Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Geometria analitica

Sonia Cannas

A.A. 2019/2020

Dalla geometria sintetica alla geometria analitica (euclidea)

Per molti secoli l'ambito matematico di maggior interesse fu la geometria. Fino agli inizi della civiltà greca la matematica si sviluppò grazie alla necessità di risolvere problemi pratici, molti dei quali di tipo geometrico (calcolare l'area di un terreno, suddividerlo in più parti di diverse forme, costruire edifici, ecc...). Con la civiltà greca, a partire da Talete, si cominciò invece a risolvere non solo problemi particolari con dati particolari, ma anche problemi di tipo generale.

Esempio

Supponiamo ad esempio di dover risolvere un problema in cui, dato un rettangolo di perimetro $P = 50$ m, si cercano i valori che devono avere i lati a e b affinché l'area sia massima. I Greci non si limitavano a risolvere solamente questo particolare problema, cercavano di trovare la soluzione del problema più generale: dato un rettangolo di assegnato perimetro P trovare qual è quello di area massima.

Dalla geometria sintetica alla geometria analitica (euclidea)

Fu nella civiltà greca che cominciarono anche diversi interessi nei confronti dell'algebra, in particolare nello studio di equazioni di primo e secondo grado. Tali studi ebbero il periodo di maggior sviluppo nel 1400 e nel 1500 d.C. Fino a tale secolo, però, lo sviluppo dell'algebra fu sempre separato da quello della geometria.

Dal 1600 con Cartesio e Fermat si cominciò a legare queste due discipline matematiche, l'algebra diventò uno strumento per risolvere problemi geometrici, e fu così che nacque la **geometria analitica**.

Dalla geometria sintetica alla geometria analitica (euclidea)

Il primo matematico che utilizzò l'algebra per risolvere problemi geometrici fu Cartesio. La sua idea fu quella di rappresentare certe grandezze non note attraverso incognite e risolvere il problema geometrico attraverso equazioni.
Il suo nome oggi è associato al noto **piano cartesiano**. In realtà non fu lui ad attribuire tale nome al sistema di riferimento del piano che stiamo per descrivere, anche perché lui stesso non fece uso di un sistema di riferimento del genere. Il piano cartesiano come lo conosciamo oggi nacque dopo Cartesio, e si sviluppò a partire dalla fondamentale idea del matematico francese di legare l'algebra alla geometria.

Piano cartesiano

Il *piano cartesiano* è un sistema di riferimento simile a quello del gioco *battaglia navale*, infatti è così costruito:

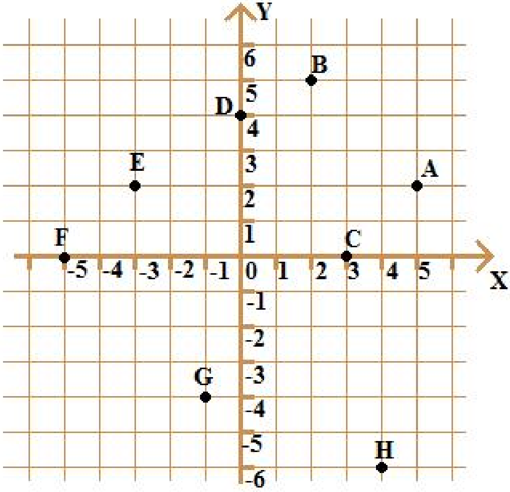
- sono scelte due rette perpendicolari, una orizzontale e una verticale, il cui punto d'intersezione è indicato con la lettera O ed è detto *origine (del sistema di riferimento)*;
- la retta orizzontale è chiamata *asse delle ascisse* (o *asse* x), quella verticale è detta *asse delle ordinate* (o *asse* y);
- su ogni retta viene scelto un verso di percorrenza, quello dell'asse delle ascisse va da sinistra verso destra, quello dell'asse delle ordinate va dal basso verso l'alto;
- su ogni retta viene stabilita un'unità di misura, essa è arbitraria, ma spesso si preferisce scegliere la stessa unità di misura su entrambi gli assi (in tal caso il sistema di riferimento è detto *monometrico*).

Piano cartesiano

Come già visto nella geometria euclidea sintetica, nel piano si possono rappresentare vari enti geometrici, tra questi anche i punti. Fissato un sistema di riferimento cartesiano possiamo rappresentarvi tutti i punti attraverso una coppia ordinata di numeri reali che si indica con $(x; y)$ o (x, y). Il primo dei due numeri indica la coordinata x del punto, il secondo la coordinata y. Complessivamente, i due numeri di tale coppia sono detti *coordinate* del punto.

Fra i punti del piano cartesiano e le coppie ordinate di numeri reali vi è quindi una **corrispondenza biunivoca**: ad ogni punto P del piano corrisponde un'unica coppia ordinata di numeri reali (x, y); viceversa ad ogni coppia di numeri reali corrisponde un unico punto del piano cartesiano.

Piano cartesiano



Esempio

Nel grafico a lato sono rappresentati i punti di coordinate:

$A = (5, 2)$
$B = (2, 5)$
$C = (3, 0)$
$D = (0, 4)$
$E = (-3, 2)$
$F = (-5, 0)$
$G = (-1, -4)$
$H = (4, -6)$

Osservazione

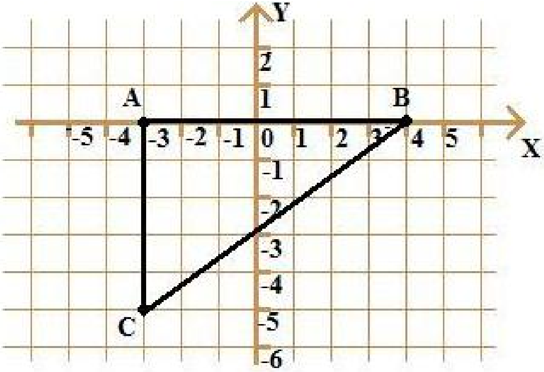
I punti A e B sono rappresentati entrambi dai numeri 2 e 5, ma osserviamo che sono punti diversi (se fossero uguali coinciderebbero). Infatti le coppie di numeri che rappresentano le coordinate sono ordinate, ciò significa che la prima coordinata è distinta dalla seconda. Ecco perché

$$A = (5, 2) \neq (2, 5) = B$$

Più in generale il piano cartesiano si ottiene dal prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il piano cartesiano resta diviso dagli assi in quattro angoli; ciascuno di questi quattro angoli, esclusi i punti appartenenti agli assi, è detto **quadrante**. Convenzionalmente i quadranti sono numerati a partire da quello in alto a destra e percorrendo il piano in senso antiorario.

Distanza tra due punti



Nel disegno a lato sono rappresentati i punti A, B, C e i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

La figura risultante è un triangolo rettangolo. Per calcolare il perimetro è necessario misurare la lunghezza di tutti i lati.

Calcolare la lunghezza dei lati paralleli agli assi è immediato. Se però avessimo avuto un triangolo rettangolo dove i quadretti fra A e B sono molti, sarebbe troppo dispendioso calcolarli tutti. In tal caso conviene misurare la lunghezza di $\overline{AB}$ algebricamente, cioè lavorando numericamente con le coordinate.

Più in generale, supponiamo di considerare un segmento $\overline{A'B'}$ parallelo all'asse x. Allora le coordinate del tipo: $B' = (x_1, y_1)$ e $A' = (x_2, y_1)$. Supponiamo che $x_1 > x_2$, quindi il punto B' si trova a destra rispetto al punto A'. Contare i quadretti per misurare la lunghezza di segmenti orizzontali equivale a calcolare il valore assoluto della differenza fra le due ascisse, cioè:

$$\overline{A'B'} = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Poiché $B = (x_1, y_1) = (4, 0)$ e $A = (x_2, y_2) = (-3, 0)$ si ha:

$$\overline{AB} = |x_1 - x_2| = |4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7$$

Valore assoluto

Definizione (Valore assoluto)

Sia $x \in \mathbb{R}$. Si definisce **valore assoluto** *di x, e si indica con $|x|$, il numero reale così definito:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Osservazione

Il valore assoluto di un numero reale è sempre un numero non negativo: infatti $|x|$ è uguale a se stesso quando x è positivo o nullo (e quindi rimane positivo), mente è uguale all'opposto di x quando x è negativo (ed essendo l'opposto di un numero negativo diventa positivo).
Inoltre $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

Valore assoluto

Esempio

$|3| = 3$ poiché $3 > 0$.
$|-2| = -(-2) = 2$ poiché $-2 < 0$.

Geometricamente il valore assoluto di un numero può essere interpretato come la distanza fra il punto che lo rappresenta sulla retta e l'origine.

Esempio

Il punto -4 dista 4 unità dall'origine, infatti $|-4| = 4$.

Valore assoluto

La definizione di valore assoluto di un'espressione algebrica $A(x)$ è la naturale estensione della definizione di valore assoluto data per un numero reale:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Esempio

$$|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{se } x+5 \geq 0 \\ -(x+5) & \text{se } x+5 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{se } x \geq -5 \\ -x-5 & \text{se } x < -5 \end{cases}$$

Esempio

$$|4-3x| = \begin{cases} 4-3x & \text{se } 4-3x \geq 0 \\ -(4-3x) & \text{se } 4-3x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |4-3x| = \begin{cases} 4-3x & \text{se } x \leq \frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{se } x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Esempio

$$|x^2+2x| = \begin{cases} x^2+2x & \text{se } x^2+2x \geq 0 \\ -(x^2+2x) & \text{se } x^2+2x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |x^2+2x| = \begin{cases} x^2+2x & \text{se } x \leq -2 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2-2x & \text{se } -2 < x < 0 \end{cases}$$

Valore assoluto

Osservazione

Il valore assoluto di un'espressione algebrica può, in alcuni casi, coincidere sempre con l'espressione stessa.
Ad esempio $|x^2+1| = x^2+1$ *per ogni valore reale di* x, *poiché* x^2+1 *è sempre positivo essendo la somma fra un quadrato (quindi un valore positivo) e un numero positivo.*

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

$$|-x| = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$|x|^2 = x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Disuguaglianza triangolare)} \tag{7}$$

Distanza tra due punti

Discorso analogo vale anche per i segmenti paralleli all'asse delle ordinate. Supponiamo di avere un segmento $\overline{A'C'}$ parallelo all'asse y con $A' = (x_1, y_1)$ e $C' = (x_1, y_2)$, con $y_1 > y_2$, allora:

$$\overline{A'c'} = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

Infatti poiché nell'esercizio $A = (x_1, y_1) = (-3, 0)$ e $C = (x_1, y_2) = (-3, -5)$ si ha:

$$\overline{AC} = |y_1 - y_2| = |0 - (-5)| = |5| = 5$$

Distanza tra due punti

Per i segmenti obliqui, come $\overline{BC}$, non è possibile "contare i quadretti". Si può calcolare la sua lunghezza applicando il teorema di Pitagora. Quindi:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \sqrt{74}$$

Quindi la formula generale della distanza fra due punti si ricava semplicemente applicando il teorema di Pitagora.

Distanza tra due punti

Consideriamo i punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Possiamo pensare il segmento $\overline{AB}$ come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di vertici A, B e $C = (x_1, y_2)$. Quindi, applicando il teorema di Pitagora:

$$d(A,B)^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

da cui

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{8}$$

Relazioni

Dati due insiemi A e B molto spesso capita di definire una relazione (o legge) fra essi.

Esempio

Sia A l'insieme dei frutti e B l'insieme dei colori. Una relazione può essere quella di associare ad ogni frutto di A il suo colore su B.

Esempio

Sia A l'insieme dei giocatori di calcio e B l'insieme delle squadre di calcio. Un relazione fra tali insiemi può essere quella di associare ad ogni giocatore la squadra in cui gioca attualmente.

Esempio

Sia A l'insieme di tutte le squadre di calcio di serie A e sia B l'insieme dei colori. Una relazione può essere quella che ad ogni squadra associa il colore/i colori della sua maglia.

Osservazione

Osserviamo che negli ultimi due esempi c'è un'importante differenza: nel primo esempio ad ogni elemento di A (cioè ogni giocatore) corrisponde uno ed un solo elemento di B, cioè una squadra; nel secondo ad alcuni elementi di A (cioè ad alcune squadre) vengono associati più elementi di B (cioè più colori).

Esempio

Sia A l'insieme dei telefilm visti da una persona e sia B l'insieme di tutti i telefilm prodotti. Una relazione può essere quella di associare ad ogni telefilm visto dalla persona lo stesso telefilm nell'insieme B.

Osserviamo che in quest'ultimo esempio sicuramente ci sono degli elementi di B che non hanno relazioni con alcun elemento di A, perché nell'insieme di tutti i telefilm ci saranno dei telefilm che la persona in questione non ha mai visto.

Esempio

Sia A l'insieme di tutti i bambini e B l'insieme di tutti i nonni. Possiamo definire una relazione che ad ogni bambino associ il suo nonno/i suoi nonni.

Osserviamo che in quest'ultimo esempio ci sono alcuni elementi di A che non hanno una corrispondenza con nessun elemento di B: ci sono bambini che non hanno più nessun nonno.

Funzioni

Le funzioni sono particolari tipi di relazioni (o leggi) tra due insiemi.

Definizione (Funzione)

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una **funzione** *da A a B è una legge che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B. L'insieme A di partenza viene detto* **dominio** *e l'insieme B di arrivo* **codominio**.

Matematicamente una funzione f si esprime nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \tag{9}$$

e l'elemento $y = f(x)$ viene chiamato *immagine* di x.

Funzioni

Esempio

Supponiamo, ad esempio, che $A = \{arancia, ciliegia, banana, prugna\}$, $B = \{giallo, verde, blu, viola, rosso, arancione\}$. Sia f la funzione che ad ogni frutto di A associa il suo colore. Matematicamente:

$$\begin{aligned} f(arancia) &= arancione \\ f(ciliegia) &= rosso \\ f(banana) &= giallo \\ f(prugna) &= viola \end{aligned}$$

Importante

Ogni elemento del dominio deve avere un'immagine nel codominio, altrimenti la relazione non è una funzione.

Funzioni

Esempio

Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Supponiamo di definire una funzione f tra tali due insiemi nel seguente modo:

$$f(1) = b$$
$$f(2) = c$$
$$f(3) = a$$

Questa non è una funzione poiché all'elemento $x = 4$ del dominio non è associato alcun elemento del codominio. Se ponessimo, ad esempio, $f(4) = a$ allora f diventerebbe una funzione. Non importa se l'elemento a è immagine di due valori, l'importante è che ogni elemento del dominio un'immagine.

Funzioni

Esempio

Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Supponiamo di definire una funzione f tra tali due insiemi nel seguente modo:

$$f(1) = b$$
$$f(2) = c$$
$$f(3) = a$$

Questa non è una funzione poiché all'elemento $x = 4$ del dominio non è associato alcun elemento del codominio. Se ponessimo, ad esempio, $f(4) = a$ allora f diventerebbe una funzione. Non importa se l'elemento a è immagine di due valori, l'importante è che ogni elemento del dominio un'immagine.

Funzioni

Esempio

Sia $A = \{Ugo, Ivo, Pio\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Supponiamo di definire una funzione f tra tali due insiemi nel seguente modo:

$$f(Ugo) = a$$
$$f(Ivo) = c$$
$$f(Pio) = b$$
$$f(Ivo) = d$$

Questa non è una funzione poiché all'elemento $x = Ivo$ del dominio sono associati due elementi del codominio. Se togliamo $f(Ivo)d$ allora f diventa una funzione. Non importa se l'elemento d del codominio non è immagine di alcun elemento del dominio, ciò non è richiesto affinché f sia una funzione.

Importante

Ad ogni elemento del dominio corrisponde uno ed un solo elemento del codominio.

Funzioni

Esempio

Sia $A = \{Ugo, Ivo, Pio\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Supponiamo di definire una funzione f tra tali due insiemi nel seguente modo:

$$f(Ugo) = a$$
$$f(Ivo) = c$$
$$f(Pio) = b$$
$$f(Ivo) = d$$

Questa non è una funzione poiché all'elemento $x = Ivo$ del dominio sono associati due elementi del codominio. Se togliamo $f(Ivo)d$ allora f diventa una funzione. Non importa se l'elemento d del codominio non è immagine di alcun elemento del dominio, ciò non è richiesto affinché f sia una funzione.

Importante

Ad ogni elemento del dominio corrisponde uno ed un solo elemento del codominio.

Funzioni

Analizzeremo funzioni in cui $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Uno degli esempi più semplici di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la retta.

La retta: equazione in forma implicita

Quello di **retta** è un concetto primitivo. Intuitivamente è un ente che ha solo una lunghezza, e si indica con una lettera minuscola.

In un piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano, una qualsiasi retta è un luogo geometrico rappresentato unicamente da un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ o } b \neq 0 \tag{10}$$

Tale equazione è detta *in forma implicita*.

Rette verticali e orizzontali

Esempio

Le seguenti equazioni rappresentano tutte delle rette:

$$2x+8y+3=0 \qquad 3x-5y+6=0 \qquad 20x+78y-34=0$$
$$-23x+65y-3=0 \qquad -32x-7y-3=0 \qquad -x-7y+4=0$$
$$2x-4=0 \qquad -3y+9=0$$

Nell'ultima riga dell'esempio sono state indicate delle rette rispettivamente con $b=0$ e $a=0$. Prendiamo in considerazione la retta $2x-4=0$. Dalle proprietà delle equazioni sappiamo che essa si può esprimere equivalentemente nel seguente modo:

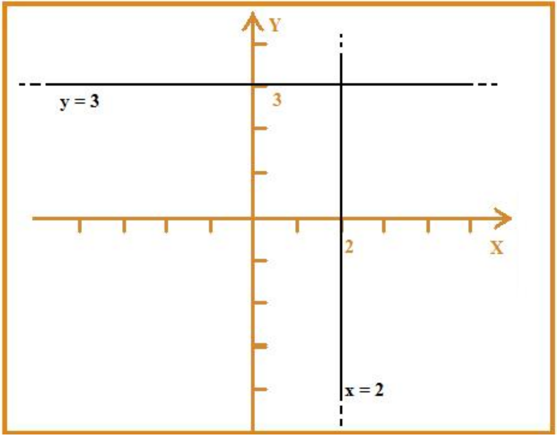
$$2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

La retta $x=2$ indica l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano aventi ascissa $x=2$, si tratta quindi di una retta verticale, cioè parallela all'asse y.

In modo analogo la retta $-3y+9=0$ si può esprimere, equivalentemente, nel seguente modo:

$$-3y=-9 \quad \Rightarrow \quad 3y=9 \quad \Rightarrow \quad y=3$$

e indica l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano aventi ordinata $y=3$, si tratta quindi di una retta orizzontale, cioè parallela all'asse x.



Rette verticali e orizzontali

In generale:

$$\begin{aligned} \text{Equazione retta verticale (parallela all'asse y)}: \qquad & x = h \qquad h \in \mathbb{R} \\ \text{Equazione retta orizzontale (parallela all'asse x)}: \qquad & y = k \qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conseguentemente le rette che rappresentano gli assi cartesiani si rappresentano analiticamente attraverso le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \text{Equazione asse x}: \qquad & y = 0 \\ \text{Equazione asse y}: \qquad & x = 0 \end{aligned}$$

La retta: equazione in forma esplicita

Data l'equazione di una retta vogliamo ora spiegare come riuscire a rappresentarla graficamente sul piano cartesiano.
Lo scopo è quello di trovare tutti i punti $P = (x, y)$ che soddisfano l'equazione della retta. Trovare tali punti l'equazione della retta 10 in forma implicita non è molto comoda, è preferibile esplicitare una delle due variabili (per convenzione si sceglie la y):

$$\begin{aligned} ax + by + c =&0 \quad \Rightarrow \quad by = -ax - c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ \Rightarrow \quad y =&mx + q \qquad \text{con } m = -\frac{a}{b} \quad q = -\frac{c}{b} \end{aligned} \tag{11}$$

Una retta espressa attraverso un'equazione del tipo 11 è detta *in forma esplicita*.

Osservazione

Per determinare la 11 si suppone $b \neq 0$. Quindi è possibile esprimere in forma esplicita tutte le rette eccetto quelle verticali.

Il valore $m = -\frac{a}{b}$ della 11 indica la pendenza della retta e viene detto *coefficiente angolare*, invece $q = -\frac{c}{b}$ indica l'ordinata del punto $Q = (0; q)$, intersezione della retta con l'asse y (cioè con $x = 0$) ed è detto *termine noto* o *ordinata all'origine*.

Osservazione

Ad eccezione delle rette verticali, le rette sono funzioni

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = mx + q \end{aligned}$$

Rappresentare una retta nel piano cartesiano

1. Considerare l'equazione di una retta in forma esplicita;
2. sostituire un valore a piacere x_0 alla x;
3. poiché $y = mx + q$, si calcola $mx_0 + q$ e tale valore indicherà la coordinata y_0 del punto della retta $P = (x_0; y_0)$.

In questa maniera viene trovato un punto della retta. Un solo punto però non è sufficiente per individuare la retta espressa dall'equazione data (per un punto passano infinite rette), perciò si ripete lo stesso ragionamento per trovare un secondo punto.
Poiché per due punti passa una ed una sola retta prolungando il segmento che congiunge i due punti si ottiene la retta desiderata.

Esercizio

Rappresentare graficamente la retta $-2x + y + 3 = 0$.

Esercizio

Rappresentare graficamente la retta $3x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} = 0$.

Retta passante per un punto e direzione assegnata

L'equazione di una retta passante per un punto assegnato $P = (x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m è

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{12}$$

Dimostrazione.

Data l'equazione di una retta in forma esplicita $y = mx + q$, per individuare l'equazione della retta passante per un punto assegnato $P = (x_0, y_0)$ occorre ricavare il valore di q. Imponendo alle coordinate di P di soddisfare l'equazione generica di una retta si ottiene:

$$y_0 = mx_0 + q \qquad \Rightarrow \qquad q = y_0 - mx_0$$

Sostituendo il valore di q così ricavato nell'equazione generica della retta si ottiene la 12:

$$y = mx + y_0 - mx_0 \qquad \Rightarrow \qquad y - y_0 = m(x - x_0)$$

$\square$

Retta passante per un punto e direzione assegnata

Esempio

Determiniamo l'equazione della retta passante per il punto $P = (-1, 6)$ e avente coefficiente angolare $m = -3$.
Utilizzando la formula (12) si ha:

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0) \\
y - 6 &= -3(x + 1) \\
y &= -3x - 3 + 6 \\
y &= -3x + 3
\end{aligned}
$$

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Utilizzando la formula (12) è possibile determinare facilmente:

- l'equazione della retta passante per un punto e parallela ad una retta data;
- l'equazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.

Condizione di parallelismo

Teorema (Condizione di parallelismo tra due rette)

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè:

$$m = m' \tag{13}$$

Esempio

Determinare l'equazione della retta passante per $P = (-1, 3)$ e parallela alla retta r di equazione $x - 2y + 1 = 0$.
Poiché la retta cercata è parallela ad r avrà lo stesso coefficiente angolare, quindi scriviamo r in forma esplicita: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Quindi il coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$.
Utilizzando la formula (12) riusciamo a determinare l'equazione della retta passante per $P = (-1, 3)$ e parallela a r:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Teorema (Criterio di perpendicolarità tra due rette)

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari hanno come prodotto -1:

$$mm' = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -\frac{1}{m'} \tag{14}$$

Esempio

Determinare l'equazione della retta passante per $P = (3, 0)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = 2x$.

Il coefficiente angolare della retta r è $m = 2$, per determinare il coefficiente angolare di una retta perpendicolare ad r basta imporre la condizione di perpendicolarità (14):

$$mm' = -1 \qquad \Rightarrow \qquad 2m' = -1 \qquad \Rightarrow \qquad m' = -\frac{1}{2}$$

Quindi la retta cercata ha coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{2}$. Utilizzando la (12) riusciamo a determinare l'equazione della retta cercata:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Retta passante per due punti

Determiniamo l'equazione di una retta di cui si conoscono le coordinate di due suoi punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

- Se $x_1 = x_2 = k$ allora la retta è parallela all'asse y, quindi la sua equazione è del tipo $x = k$.

Esempio

L'equazione della retta passante per $A = (1, 3)$ e $B = (1, -2)$ è $x = 1$.

- Se $y_1 = y_2 = k$ allora la retta è parallela all'asse x, quindi la sua equazione è del tipo $y = k$.

Esempio

L'equazione della retta passante per $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 3)$ è $y = 3$.

- Se i due punti non sono allineati su rette parallele agli assi la retta ha equazione $y = mx + q$.

Retta passante per due punti

Teorema (Coefficiente angolare della retta passante per due punti)

Il coefficiente angolare m di una retta passate per due punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ è uguale al rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di A e B, in simboli:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \tag{15}$$

Dimostrazione.

Poiché le due coppie ordinate rappresentano soluzioni, devono valere le seguenti identità:

$$y_1 = mx_1 + q \qquad y_2 = mx_2 + q$$

Risolviamo il sistema formato dalle due equazioni sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + q) - (mx_1 + q) \quad \Rightarrow \quad y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Noto il coefficiente angolare m e due punti di una retta, l'equazione della retta può essere determinata utilizzando la formula (12) per l'equazione di una retta passante per un punto e di direzione assegnata. Come punto si può scegliere indifferentemente uno dei due punti dati.

Esempio

Determinare l'equazione della retta passante per $A = (-2, 4)$ e $B = (1, -1)$.
Calcoliamo il coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 4}{1 - (-2)} = -\frac{5}{3}$$

Scriviamo l'equzione della retta di coefficiente angolare $m = -\frac{5}{3}$ e passante per A o B. Per esempio utilizziamo A:

$$y - 4 = -\frac{5}{3}(x - (-2)) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}$$

Retta passante per due punti

Osserviamo che sostituendo $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ nella formula della retta passante per un punto e direzione assegnata si ha:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\
\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

La (16) è, quindi, una formula immediata per determinare l'equazione di una retta passante per due punti.

Date due rette possono verificarsi le seguenti situazioni:

1. le due rette sono incidenti, cioè hanno un punto in comune;
2. le due rette sono parallele e distinte, quindi non hanno alcun punto in comune;
3. le due rette sono coincidenti, cioè hanno infiniti punti in comune.

Date le equazioni di due rette come è possibile capire la loro posizione reciproca, cioè se sono incidenti, parallele o coincidenti?

Osserviamo che determinare se due rette sono parallele è immediato poiché due rette, per il teorema sulla condizione di parallelismo tra due rette, sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè $m = m'$. Tale criterio, però, vale solo per individuare il parallelismo.

Posizione reciproca di due rette

Una soluzione generale per determinare la posizione reciproca tra due o più rette potrebbe essere quella di disegnarle graficamente. Tale soluzione, però, spesso non è la più breve e soprattutto non sempre darebbe tutte le informazioni che ci interessano: nel caso in cui le rette fossero incidenti in generale è difficile stabilire "a occhio" il loro punto d'intersezione.

Fortunatamente esiste un metodo algebrico per risolvere tale problema: basta risolvere un sistema di equazioni lineari.

In generale possono capitare i 3 seguenti casi.

1. Il sistema ammette una ed una sola soluzione (x, y): le rette sono incidenti e il punto in cui si intersecano è proprio il punto di coordinate (x, y).
2. Il sistema è impossibile, cioè non ammette soluzione: le rette non hanno alcun punto in comune, quindi sono parallele e distinte.
3. Il sistema è indeterminato, cioè ammette infinite soluzioni: le rette hanno infiniti punti in comune, quindi sono coincidenti.

Esempio

Determinare se le rette $x+2=0$ e $2x-5y+1=0$ sono incidenti, parallele o coincidenti.

$$\begin{cases} x+2=0 \\ 2x-5y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ 2(-2)-5y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ -4-5y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ -5y=3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{-3}{5} \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione: $\left(-2; -\frac{3}{5}\right)$. Quindi le rette sono incidenti nel punto $\left(-2, -\frac{3}{5}\right)$.

Esempio

Determinare se le rette $y = 2x - 1$ e $2x - y = 1$ sono incidenti, parallele o coincidenti.

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - (2x - 1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 2x + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 0 \cdot x = 1 - 1 \end{cases}$$

La seconda equazione è indeterminata, quindi il sistema ammette infinite soluzioni. Quindi le rette sono coincidenti.

Posizione reciproca di due rette

Esempio

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

Osserviamo che tali rette hanno entrambe $m = 2$, cioè hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi sono parallele

Esempio

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Le due equazioni sono identiche perciò sono rappresentate dalla stessa retta: le due rette sono coincidenti e il sistema è indeterminato.

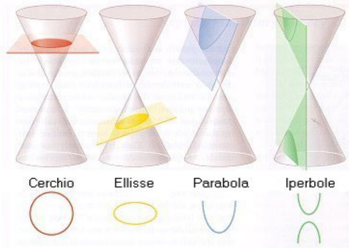
Definizione (Conica)

Si definisce conica, o sezione conica, una curva piana che sia luogo dei punti che si ottengono intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano.

Coniche

Consideriamo un doppio cono costituito da due coni circolari retti coassiali (cioè aventi lo stesso asse) aventi il vertice in comune. Prendiamo ora un piano e intersechiamolo col cono. A seconda dell'inclinazione del piano si possono ottenere le seguenti coniche (non degeneri):

- la *circonferenza*, ottenuta dall'intersezione del cono con un piano perpendicolare al suo asse;
- l'*ellisse*, ottenuto intrsecando il cono con un piano inclinato di un certo angolo inferiore all'inclinazione del lato del cono;
- la *parabola*, ottenuta intersecando il cono con un piano parallelo a un lato del cono;
- l'*iperbole*, ottenuta intersecando il cono con un piano parallelo al suo asse.



Circonferenza: definizione come luogo di punti

Definizione (Circonferenza)

Sia C un punto del piano e r un numero reale positivo. La **circonferenza** *è il luogo dei punti P del piano aventi distanza costante r dal punto fisso C detto centro.*

Usando tale definizione possiamo ricavare l'equazione generica di una circonferenza.
Sia $C = (x_0, y_0)$ il centro e sia $P = (x, y)$ un punto generico della circonferenza. Per definizione la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro, matematicamente ciò si esprime nel modo seguente:

$$d(P, C) = r$$

Circonferenza: equazione

Applicando la formula della distanza tra due punti otteniamo:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$x^2+x_0^2-2x_0x+y^2+y_0^2-2y_0y=r^2$$
$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

Poniamo:

$$a=-2x_0 \qquad b=-2y_0 \qquad c=x_0^2+y_0^2-r^2$$

Sostituendo tali valori, l'equazione precedente diventa:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R} \tag{17}$$

Circonferenza: equazione

Esercizio

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C = (0; 0)$ e raggio 1.
Dalla definizione di circonferenza abbiamo:

$$d(P, C) = r$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$$
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Circonferenza: equazione

Esercizio

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C = (-3; 1)$ e raggio $r = \sqrt{10}$.

Dalla definizione di circonferenza abbiamo:

$$d(P, C) = r$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$$

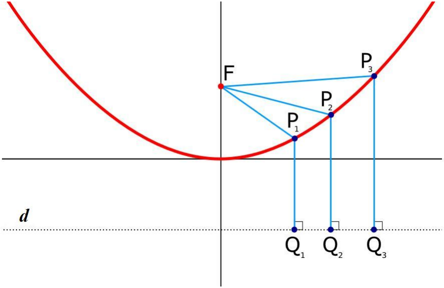
Parabola: definizione come luogo di punti

Definizione (Parabola)

La parabola è il luogo dei punti P equidistanti da una retta d, detta direttrice, e da un punto F, detto fuoco. Cioè è il luogo dei punti P tali che:

$$d(P, F) = d(P, d) \tag{18}$$

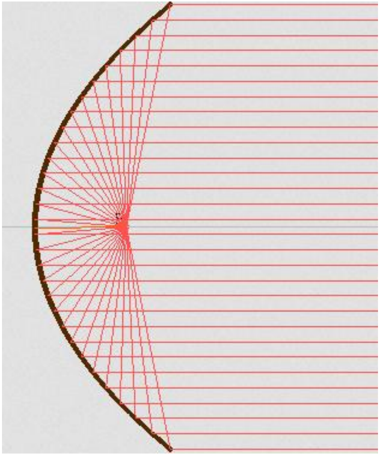
Quindi la parabola è l'insieme dei punti P tali che, indicata con Q la proiezione ortogonale di P sulla retta d, sono uguali tra loro le lunghezze dei segmenti $\overline{PF} = \overline{PQ}$



Osservazione

- La parabola ha un *asse di simmetria*: è la retta passante per F perpendicolare alla direttrice d; se un punto appartiene alla parabola allora vi appartiene anche il suo simmetrico P'.
- La parabola ha un *vertice*: è il punto medio fra il fuoco e la direttrice.

La parabola ha una caratteristica molto importante: se nel fuoco è posta una sorgente luminosa e la "parete" interna della parabola è rivestita di materiale riflettente, ogni raggio luminoso che parte dal fuoco si riflette in un raggio perpendicolare alla direttrice. Tale proprietà è nota come *proprietà focale*.



Parabola: proprietà focale

Applicazioni della proprietà focale

- Una leggenda narra che Archimede (287-212 a.C. circa) per proteggere la città di Siracusa dall'assedio della flotta romana fece installare in prossimità del porto grandi specchi di forma parabolica (detti specchi ustori) che, opportunamente orientati verso le navi romane, le fecero incendiare.
- Un'importante applicazione delle proprietà delle superfici paraboliche è quella relativa alla costruzione di antenne che funzionano da amplificatori di segnali provenienti da satelliti o dallo spazio.
- Oggi il metodo di concentrazione dei raggi solari viene utilizzato in alcune centrali solari per la produzione di energia elettrica. Un esempio di applicazione è la centrale sperimentale Archimede nei pressi di Siracusa.
- Grazie alla proprietà focale la parabola può riflettere i raggi luminosi e dar luogo ad illusioni come questa.

Per ricavare l'equazione della parabola partiamo dalla sua definizione come luogo di punti, cioè $d(P, F) = d(P, d)$.

Consideriamo il caso particolare di una parabola con la direttrice d di equazione $y = -k$, $k > 0$, e tale per cui il punto medio tra il fuoco F e la direttrice d (cioè il vertice della parabola) sia l'origine $O = (0, 0)$ del sistema di riferimento. Quindi $F = (0, k)$. Sia $P = (x, y)$ un generico punto della parabola. Per ricavare l'equazione utilizziamo la definizione di parabola come luogo dei punti P tali per cui $\overline{PF} = \overline{PQ}$, dove Q è la proiezione ortogonale di P sulla retta d, quindi $Q = (x, -k)$.

$$d(P,F) = d(P,Q) \qquad \text{(utilizzando la formula della distanza tra due punti)}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+k)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2ky + k^2} = \sqrt{y^2 + 2ky + k^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ky + k^2 = y^2 + 2ky + k^2$$

$$x^2 - 2ky = 2ky$$

$$x^2 = 4ky$$

$$y = \frac{1}{4k}x^2$$

Ponendo $\frac{1}{4k} = a$ si ottiene l'equazione della parabola cercata:

$$y = ax^2 \tag{19}$$

Parabola: equazione

Osservazione

Tale parabola ha l'asse delle ordinate come suo asse di simmetria. Possono verificarsi due casi:

- F è "al di sopra" di d $\Rightarrow$ la parabola ha concavità verso l'alto $\Rightarrow$ $a > 0$;
- F è "al di sotto" di d $\Rightarrow$ la parabola ha concavità verso il basso $\Rightarrow$ $a < 0$;

Parabola: equazione

Nel ricavare l'equazione della parabola abbiamo considerato una parabola particolare (asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine).
Per ricavare l'equazione di una generica parabola con l'asse parallelo all'asse y basta traslare il vertice $V = (0,0)$ della parabola già studiata in un vertice generico $V' = (x_v, y_v)$. Dopo la traslazione si ottiene l'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse y:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{20}$$

Anche se è meno comune, una parabola può avere l'asse parallelo all'asse x (anziché l'asse y), in tal caso per ottenere l'equazione generica basta scambiare le variabili x e y nella 20:

$$x = ay^2 + by + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{21}$$