Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Funzioni

Sonia Cannas

A.A. 2019/2020

Funzioni: definizione

Abbiamo visto che le funzioni sono particolari tipi di relazioni tra due insiemi.

Definizione (Funzione)

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una **funzione** *(o* **applicazione** *o* **mappa***) da A a B è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B. L'insieme A di partenza viene detto* **dominio** *e l'insieme B di arrivo* **codominio** *della funzione.*

Matematicamente una funzione f si esprime nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

L'elemento $y = f(x)$ viene chiamato *immagine* di x, mentre x è chiamato *controimmagine* di y.
L'insieme di tutte le immagini $y \in B$ si denota con $Im(f)$, ed è un sottoinsieme del condominio B.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{molecole\}$ e $B = \{atomi\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni molecola gli atomi che la compongono.

f non è una funzione, poiché esistono molecole composte da più atomi.
Controesempio: CO_2 (molecola di anidride carbonica) è composta da un atomo di carbonio e due atomi di ossigeno.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{molecole\}$ e $B = \{atomi\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni molecola gli atomi che la compongono.

f non è una funzione, poiché esistono molecole composte da più atomi. Controesempio: CO_2 (molecola di anidride carbonica) è composta da un atomo di carbonio e due atomi di ossigeno.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f: A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

f è una funzione, poiché ad ogni residente in Italia corrisponde uno ed un solo codice fiscale.

Esempio

Una relazione $f: A \to A$ che associa ad ogni elemento di A sé stesso, cioè tale che

$$f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

è una funzione detta *funzione identità*. La indicheremo con Id_A.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

f è una funzione, poiché ad ogni residente in Italia corrisponde uno ed un solo codice fiscale.

Esempio

Una relazione $f : A \to A$ che associa ad ogni elemento di A sé stesso, cioè tale che

$$f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

è una funzione detta *funzione identità*. La indicheremo con Id_A.

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

f è una funzione, poiché ad ogni residente in Italia corrisponde uno ed un solo codice fiscale.

Esempio

Una relazione $f : A \to A$ che associa ad ogni elemento di A sé stesso, cioè tale che

$$f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

è una funzione detta *funzione identità*. La indicheremo con Id_A.

Funzioni iniettive

Definizione (Funzione iniettiva)

Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** *se ad elementi distinti del dominio A corrispondono elementi distinti del codominio B, cioè*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \ \textit{con } x_1 \neq x_2, \textit{si ha } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio

La funzione $f : A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è iniettiva.

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{città del mondo}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia la città in cui è nato. La relazione f è una funzione, ma non iniettiva.

Funzioni suriettive

Definizione (Funzione suriettiva)

Una funzione $f : A \to B$ si dice **suriettiva** *se ogni elemento $y \in B$ è immagine di almeno un elemento $x \in A$, cioè se*

$$Im(f) = B$$

Esempio

La funzione $f : A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è suriettiva.

Esempio

Siano $A = \{\text{Nati in Italia}\}$ e $B = \{\text{Città del mondo}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni nato in Italia la precisa città in cui è nato, fra tutte quelle del mondo. La relazione f è una funzione, ma non suriettiva, infatti $Im(f) = \{\text{Città italiane}\} \subset B$.

Funzioni bigettive

Definizione (Funzione bigettiva)

Una funzione $f : A \to B$ *si dice* **bigettiva** *se è sia iniettiva sia suriettiva.*

Esempio

La funzione $f : A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è bigettiva.

Esempio

La funzione $f : A \to B$, dove $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{città del mondo}\}$ non è iniettiva, quindi non è neanche bigettiva.

Esempio

La funzione $f : A \to B$, dove $A = \{\text{Nati in Italia}\}$ e $B = \{\text{Città del mondo}\}$ non è suriettiva, quindi non è neanche bigettiva.

Funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione. Preso $y \in Im(f)$, in generale ad esso risultano associati uno o più elementi $x \in A$ tali che $f(x) = y$. Pertanto la relazione che associa ad ogni $y \in Im(f)$ la sua controimmagine non è in generale una funzione. Lo è se, e solo se, f è iniettiva, poiché in tal caso la controimmagine è unica per ogni elemento $y \in Im(f)$.

Definizione (Funzione inversa)

Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva. Chiamiamo sua **inversa** *la funzione f^{-1} che associa ad ogni $y \in Im(f)$ la sua controimmagine $x \in A$*

Attenzione

La notazione $f^{-1}(y) \neq \dfrac{1}{f(y)}$.

Funzione inversa

Esempio

Consideriamo la funzione $f\colon A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Essa è iniettiva, quindi possiamo definire la funzione inversa $f^{-1}\colon Im(f) \to A$ che ad ogni codice fiscale $y \in Im(f)$ associa la corrispondente persona $x \in A$ residente in Italia.

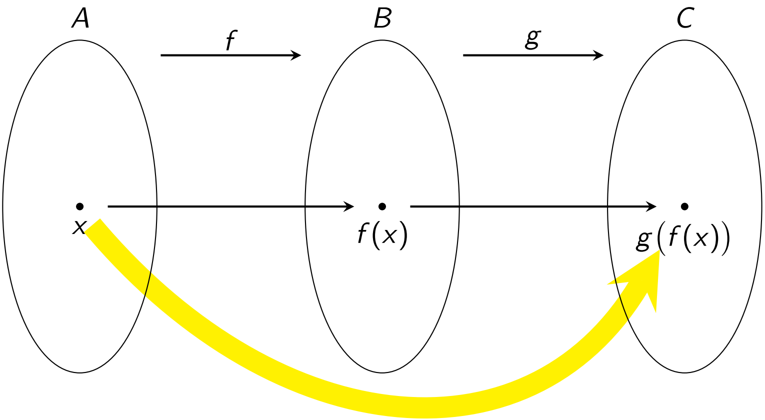
Supponiamo, ad esempio, che il codice fiscale di $x = \text{Antonio Rossi}$ sia $y = RSSNTN80A01H501O$.
Allora $f^{-1}(y) = f^{-1}(RSSNTN80A01H501O) = \text{Antonio Rossi}$.

Composizione di funzioni

È possibile definire operazioni tra funzioni, una di esse è la composizione.

Definizione (Funzione composta)

Siano date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Si definisce **funzione composta**, *mediante f e g, la funzione $h : A \to C$ che ad ogni elemento $x \in A$ associa l'elemento $h(x) = g(f(x))$.*



Funzione composta

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$, $B = \{\text{Codici fiscali}\}$ e $C = \{\text{Sessi}\}$.
Definiamo $f\colon A \to B$ la funzione che ad ogni residente in Italia associa il suo codice fiscale, e $g\colon B \to C$ la funzione che ad ogni codice fiscale associa il sesso della persona.
Possiamo definire la funzione $h\colon A \to C$, che ad ogni residente in Italia $x \in A$ associa il suo sesso $g(f(x)) \in C$.

Supponiamo, ad esempio, che il codice fiscale di $x =$ Antonio Rossi sia $f(x) = RSSNTN80A01H501O$. Allora $h(x) = g(f(x)) = M$.

Osservazione

Se si compone una funzione $f\colon A \to B$ con la sua inversa $f^{-1}\colon B \to A$ si ottiene la funzione identità, cioè

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$$

Funzioni reali a variabile reale

Durante il corso focalizzeremo la nostra attenzione sul caso in cui entrambi gli insiemi A e B coincidono (o sono sottoinsiemi) di $\mathbb{R}$, quando cioè la corrispondenza fra A e B associa ad un numero reale uno e un solo numero reale. Tali funzioni sono dette *funzioni reali di una variabile reale*, e possono essere descritte tramite una formula del tipo $y = f(x)$.

La scrittura

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

indica una funzione f reale di variabile reale, definita sul dominio A.

Grafici di funzioni reali di variabile reale

Il dominio delle funzioni reali a variabile reale è un insieme di numeri reali, e abbiamo visto che possiamo rappresentare $\mathbb{R}$ come l'insieme dei punti di una retta. Rappresenteremo questa retta orizzontalmente.
Analogamente, il codominio sarà rappresentato dai punti di una retta, che rappresenteremo verticalmente e identificheremo con l'asse verticale di un piano cartesiano.

La relazione individuata dalla funzione f corrisponde all'associazione tra un'ascissa $x \in A$ e la corrispondente ordinata $y = f(x)$.

Associando a ogni ascissa $x \in A$ la corrispondente ordinata $y = f(x)$ si ottiene il **grafico** della funzione.

Attenzione

Non tutte le relazioni tra insiemi di numeri reali sono funzioni, quindi non tutte le equazioni algebriche rappresentano funzioni.

Esempio

Le rette che si possono esprimere nella forma $y = mx + q$ sono funzioni.
Le rette verticali, invece, non sono funzioni.

Esempio

Le parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (quindi con l'asse parallelo all'asse y) sono funzioni.
Non sono funzioni, invece, le parabole del tipo $x = ay^2 + by + c$ (quindi con l'asse parallelo all'asse x).

Esempio

Non sono funzioni le circonferenze $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Metodi per determinare se la relazione tra numeri reali data è una funzione

- La relazione è una funzione se si può esplicitare la y, quindi se si può scrivere nella forma $y = f(x)$.
- La relazione è una funzione se ogni retta verticale interseca il grafico in al più un punto (*test verticale*).

Esempio

La circonferenza non è una funzione poiché :

- dalla sua equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ non è possibile esplicitare la y e ottenere un'espressione del tipo $y = f(x)$;
- ci sono infiniti punti in cui la retta verticale interseca il grafico della circonferenza in due punti.

Grafici di funzioni reali di variabile reale

Uno degli scopi dello studio dell'analisi matematica durante il corso sarà quello di disegnare il grafico di una funzione a partire dalla sua formula $y = f(x)$.

Il primo punto fondamentale per rappresentare il grafico di una funzione è determinare il dominio della funzione.

Definizione (Funzione strettamente crescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **strettamente crescente** *(o* **crescente in senso stretto***) se* $\forall x_1, x_2 \in A$*, con* $x_1 < x_2$*, si ha* $f(x_1) < f(x_2)$*.*

Definizione (Funzione monotona crescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **monotona crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in A$*, con* $x_1 < x_2$*, si ha* $f(x_1) \leq f(x_2)$*.*

Esempio

Le rette $y = mx + q$ con $m > 0$ sono funzioni strettamente crescenti.

Funzioni monotone

Definizione (Funzione strettamente decrescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **strettamente decrescente** *(o* **decrescente in senso stretto***) se* $\forall x_1, x_2 \in A$*, con* $x_1 < x_2$*, si ha* $f(x_1) > f(x_2)$*.*

Definizione (Funzione monotona decrescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **monotona decrescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in A$*, con* $x_1 < x_2$*, si ha* $f(x_1) \geq f(x_2)$*.*

Esempio

Le rette $y = mx + q$ con $m < 0$ sono funzioni strettamente decrescenti.

Definizione (Funzione convessa)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **convessa** *(o con* **concavità verso l'alto***) nell'intervallo* $[x_1, x_2] \subseteq A$ *se la corda congiungente i punti* $(x_1, f(x_1))$ *e* $(x_2, f(x_2))$ *sta nell'intervallo al di sopra del grafico di* f*. Se tale relazione vale* $\forall x_1, x_2 \in A$ *la funzione è convessa in* A*.*

Esempio

Le parabole $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ sono funzioni convesse.

Funzioni convesse e concave

Definizione (Funzione concava)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **concava** *(o con* **concavità verso il basso***) nell'intervallo* $[x_1, x_2] \subseteq A$ *se la corda congiungente i punti* $(x_1, f(x_1)$ *e* $(x_2, f(x_2))$ *sta al di sotto del grafico di* f*. Se tale relazione vale* $\forall x_1, x_2 \in A$ *la funzione è concava in* A*.*

Esempio

Le parabole $y = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$ sono funzioni concave.

Funzioni pari e dispari

Definizione (Funzione pari)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **pari** *se* $\forall x \in A$ *risulta* $f(x) = f(-x)$.

Osservazione

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio

La parabola $y = x^2$ è pari.
Infatti:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Osservazione

Più in generale, sono pari tutte le parabole del tipo $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Più in generale, sono pari tutte le funzioni del tipo $y = ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, dove $n \in \mathbb{N}$ è pari.

Funzioni pari e dispari

Definizione (Funzione dispari)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **dispari** *se* $\forall x \in A$ *risulta* $f(x) = -f(-x)$.

Osservazione

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

Esempio

La retta $y = 7x$ è dispari.
Infatti:

$$f(-x) = 7(-x) = -7x \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-7x) = 7x = f(x)$$

Osservazione

Più in generale, sono dispari tutte le rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Sono dipari tutte le funzioni del tipo $y = ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, dove $n \in \mathbb{N}$ è dispari.

Funzioni lineari

Le **funzioni lineari** sono definite mediante polinomi di primo grado, quindi sono della forma

$$f(x) = mx + q$$

cioè sono rette.
Le abbiamo già studiate nelle lezioni precedenti.

Funzioni potenza

Le **funzioni potenza** sono della forma

$$f(x) = ax^n \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$$

Analizziamo prima il caso in cui $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

n=1

Le funzioni potenza $f(x) = ax$ sono funzioni lineari.

n=2

Le funzioni potenza $f(x) = ax^2$, dette anche *funzioni quadrato*, sono parabole.

Funzioni potenza

n=3

La funzione potenza $f(x) = x^3$ è detta anche *funzione cubo*.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- il dominio è $\mathbb{R}$;
- $f(0) = 0$, cioè se $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 = 0$, quindi il grafico passerà per l'origine $(0, 0)$;
- è una funzione dispari, infatti

  $$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-x^3) = x^3 = f(x)$$

  quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
- $\forall x > 0$ risulta $x^3 > 0$, quindi il grafico sarà al di sopra dell'asse x nell'intervallo $(0, +\infty)$;
- essendo simmetrica rispetto all'origine il grafico sarà al di sotto dell'asse x nell'intervallo $(-\infty, 0)$;

Funzioni potenza

n=3

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, si ha

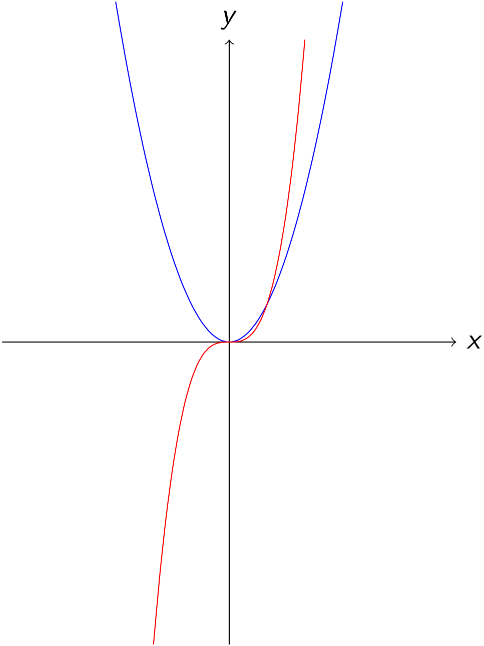
$$f(x_1) = (x_1)^3$$
$$f(x_2) = (x_2)^3$$

e, poiché $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$, quindi la funzione è strettamente crescente.

Osservazione

Per $x \geq 1$ risulta $x^3 \geq x^2$, quindi nell'intervallo $[1, +\infty)$ il grafico di $f(x) = x^3$ sarà al di sopra di quello di $f(x) = x^2$.

Funzioni potenza



In blu $f(x) = x^2$.

In rosso $f(x) = x^3$.

n=4

Consideriamo la funzione potenza $f(x) = x^4$.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- il dominio è $\mathbb{R}$;
- $f(0) = 0$, cioè se $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 = 0$, quindi il grafico passerà per l'origine $(0, 0)$;
- è una funzione pari, infatti

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$$

  quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y;
- $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $x^4 > 0$, quindi il grafico sarà al di sopra dell'asse x;

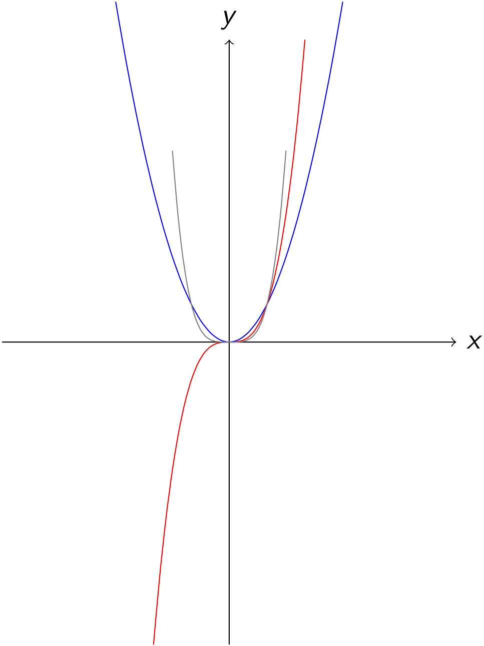
n=4

- $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, con $x_1 < x_2$, si ha
$$f(x_1) = (x_1)^4$$
$$f(x_2) = (x_2)^4$$
e, poiché $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$, quindi la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$.
- essendo simmetrica rispetto all'asse y, nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione sarà strettamente decrescente.

Osservazione

Per $x \geq 1$ risulta $x^4 \geq x^2$, quindi nell'intervallo $[1, +\infty)$ il grafico di $f(x) = x^4$ sarà al di sopra di quello di $f(x) = x^2$.

Funzioni potenza



In blu $f(x) = x^2$.

In rosso $f(x) = x^3$.

In grigio $f(x) = x^4$.

Funzioni potenza

In generale i grafici delle funzioni potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n \leq 2$, sono di due tipi.

n pari

- La funzione è pari:
- la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente in $(0, \infty)$

n dispari

- La funzione è dispari;
- la funione è strettamente crescente.

Caratteristiche comuni

Tutte le funzioni potenza

- hanno dominio $D = \mathbb{R}$;
- passano per l'origine $(0, 0)$.

Funzioni potenza

Osservazione

Le funzioni $f(x) = ax^n$ hanno diversi grafici al variare di $a \in \mathbb{R}^+$, ma soddisfano le caratteristiche elencate in precedenza.

Osservazione

Se $a \in \mathbb{R}^-$ si hanno i seguenti casi:

- se n è pari la funzione è simmetrica rispetto all'asse x;
- se n è dispari la funzione è simmetrica rispetto all'origine.

Analizziamo ora il caso di funzioni potenza $f(x) = x^n$ dove l'esponente è frazionario e positivo.

$n = \frac{1}{2}$

Consideriamo $f(x) = \sqrt{x}$.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- è definita per $x \geq 0$, quindi il suo dominio $D = [0, +\infty)$;
- $f(0) = \sqrt{0} = 0$, quindi il grafico passa per l'origine $(0, 0)$;
- poiché la radice di un numero non negativo è sempre un numero non negativo, la funzione è positiva, quindi il grafico è al di sopra dell'asse x;

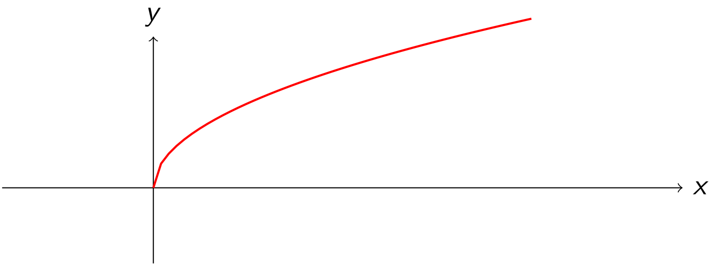
Funzioni potenza

$n = \frac{1}{2}$

- $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, con $x_1 < x_2$, si ha

$$f(x_1) = \sqrt{x_1}$$
$$f(x_2) = \sqrt{x_2}$$

e, poiché $x_1 < x_2$, risulta $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$.



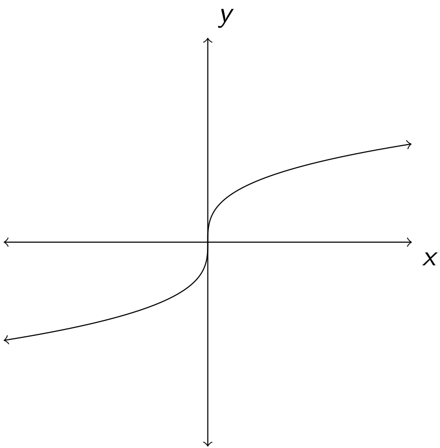
$n = \frac{1}{3}$

Consideriamo $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi il suo dominio $D = (-\infty, +\infty)$;
- $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$, quindi il grafico passa per l'origine $(0, 0)$;
- poiché la radice cubica di un numero reale è positiva se $x > 0$, nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è sopra l'asse x;
- poiché la radice cubica di un numero reale è negativa se $x < 0$, nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione è sotto l'asse x;
- è una funzione dispari, infatti:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} = f(x).$$

Funzioni potenza



Funzioni potenza

Osservazione

Le funzioni $f(x) = ax^n$ con esponente n negativo diventano **funzioni razionali fratte**.

Funzione esponenziale

Abbiamo definito il concetto di potenza per esponenti naturali, interi e razionali.
I fenomeni che si evolvono nel tempo *in senso discreto*, cioè considerando il corso degli anni o dei giorni, possono essere rappresentati da una funzione $y = f(n)$, dove $n \in \mathbb{N}$ rappresenta il numero di giorni o anni.

Esempio

La mitosi è un processo di riproduzione cellulare: da una cellula diploide se ne formano due con lo stesso patrimonio cromosomico. Se N_0 rappresenta il numero iniziale delle cellule, l'evoluzione dell'accrescimento cellulare mediante il fenomeno della mitosi il seguente:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 2N_0 \\
N_2 &= 2N_1 = 2(2N_0) = 2^2 N_0 \\
N_3 &= 2N_2 = 2(2^2 N_0) = 2^3 N_0 \\
&\vdots \\
N_k &= 2^k N_0
\end{aligned}
$$

La funzione che rappresenta tale processo è $f(n) = N_0 \cdot 2^n$, dove il dominio $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Funzione esponenziale

È possibile definire il concetto di potenza anche per esponenti irrazionali con base positiva, quindi per tutti i numeri reali con base positiva. I fenomeni che si evolvono nel tempo *in senso continuo*, cioè considerando la lancetta dei secondi che scorre con continuità, si descrivono con potenze con esponenti reali.

Definizione (Funzione esponenziale)

Si definisce **funzione esponenziale** *di base a, con a positivo e diverso da* 1, *la funzione:*

$$y = a^x \qquad \textit{con } a > 0, a \neq 1 \tag{2}$$

Esempio

Alcuni esempi di funzioni esponenziali:

$$y = 2^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = 4^{-3x} = \left(4^{-3}\right)^x = \left(\frac{1}{4^3}\right)^x = \left(\frac{1}{64}\right)^x$$

Funzione esponenziale

Attenzione

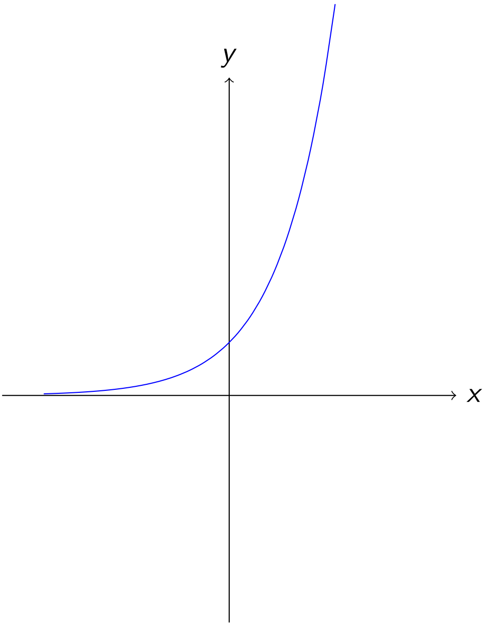
La base a è un numero fissato, l'incognita è l'esponente.

Per disegnare i grafico distinguiamo il caso $a > 1$ dal caso $0 < a < 1$.

Caso $a > 1$

- Il dominio $D = \mathbb{R}$;
- essendo la base $a > 0$, la funzione $f(x) = a^x$ è positiva, quindi il grafico è al di sopra dell'asse x;
- se $x = 0$ allora $y = a^x = 1$, quindi il grafico passa per il punto $(0, 1)$;
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ si ha $a^{x_1} < a^{x_2}$, quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente crescente.

Funzione esponenziale



Esiste un valore della base della funzione esponenziale particolarmente interessante: si tratta del **numero di Nepero**, un numero irrazionale che si indica con la lettera e le cui prime cifre decimali sono: $2,718281\dots$.

In blu il grafico dell'esponenziale $y = e^x$.

Funzione esponenziale

Osservazione

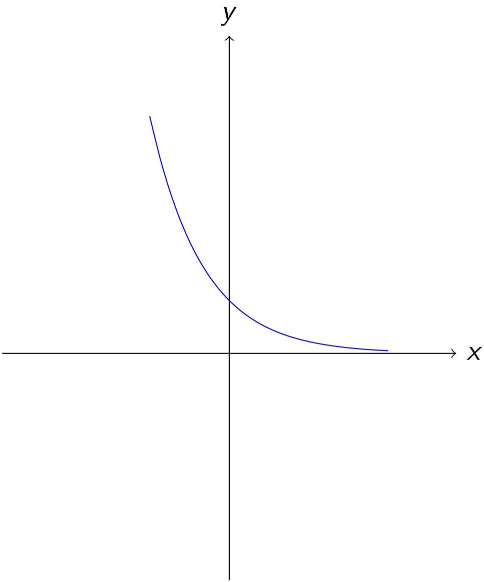
Le funzioni $y = e^{kx}$, con $k > 0$, hanno lo stesso andamento qualitativo della funzione $y = e^x$.

Funzione esponenziale

Abbiamo disegnato il grafico qualitativo delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con $a > 1$. Ora studiamo il caso $0 < a < 1$.

Caso $0 < a < 1$

- Il dominio $D = \mathbb{R}$;
- essendo la base $a > 0$, la funzione $f(x) = a^x$ è positiva, quindi il grafico è al di sopra dell'asse x;
- se $x = 0$ allora $y = a^x = 1$, quindi il grafico passa per il punto $(0, 1)$;
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ si ha $a^{x_1} > a^{x_2}$, quindi $f(x_1) > f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente decrescente.



In blu il grafico dell'esponenziale $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

Osservazione

$\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$

Funzioni esponenziali come modelli matematici

Le funzioni esponenziali compaiono in diversi modelli matematici.

Modello matematico

Un modello matematico è la costruzione di una particolare riproduzione della realtà, per poi poterla studiare matematicamente.
La sua realizzazione può essere schematizzata come segue.

1. Problema del mondo reale (fenomeno fisico, biologico, chimico, farmacologico, economico, ecc...).
2. Costruzione del modello.
3. Studio matematico del modello.
4. Verifica sperimentale.

Funzioni esponenziali come modelli matematici

Crescita malthusiana di una popolazione

Il demografo inglese Malthus (1766 – 1834) introdusse il primo modello di dinamica della popolazione. Esso studia lo sviluppo di una popolazione con risorse illimitate di spazio e cibo.
Nota la popolazione P_0 relativa a un istante iniziale, lo scopo è quello di determinare il valore della popolazione P_t in un generico istante futuro t.
Si suppone che la differenza fra nascite e morti nell'unità di tempo sia costante e uguale a c.
La dinamica della popolazione è rappresentata dalla funzione esponenziale

$$P(t) = P_0 c^t$$

Decadimento esponenziale nella concentrazione di un farmaco nel sangue

La dinamica della concentrazione di un farmaco somministrato per via endovenosa viene studiata attraverso un'equazione differenziale, la cui soluzione è

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

dove C_0 e k sono costanti note e rappresentano, rispettivamente, la concentrazione iniziale del farmaco e il suo decadimento esponenziale.

Funzione logaritmica

Definizione (Funzione logaritmica)

Si definisce **funzione logaritmica** *la funzione inversa dell'esponenziale*

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Definizione (Logaritmo)

Siano $a, b > 0$, con $a \neq 1$, si definisce **logaritmo** *in* **base** *a di b, e si indica con $\log_a(b)$, l'esponente c al quale si deve elevare la base a per ottenere b. Il numero b è detto* **argomento** *del logaritmo. In simboli:*

$$c = \log_a b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^c = b$$

Esempio

Calcolare il logaritmo $\log_2 8$.

$$\log_2 8 = c \quad \Leftrightarrow \quad 2^c = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3$$

Funzione logaritmica

Le basi dei logaritmi possono essere diverse, le più utilizzate sono: la base 10 e la base e. Il logaritmo in base e viene detto **naturale** e spesso si indica con $\ln(x)$.

Osservazione

$\log_a 1 = 0 \qquad \forall a > 0, a \neq 1$

Osservazione

$\log_a a = 1 \qquad \forall a > 0, a \neq 1$

Osservazione

Poiché $a > 0$, $a^c = b$ è sempre positivo. Di conseguenza l'argomento b del logaritmo dev'essere positivo.

Caso $a > 1$

- Poiché l'argomento del logaritmo deve essere sempre positivo, il dominio $D = (0, +\infty)$;
- se $x = 1$ allora $y = \log_a(1) = 0$, quindi il grafico passa per il punto $(1, 0)$;
- $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, se $x_1 < x_2$ si ha $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$, quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente crescente.

Funzione logaritmica

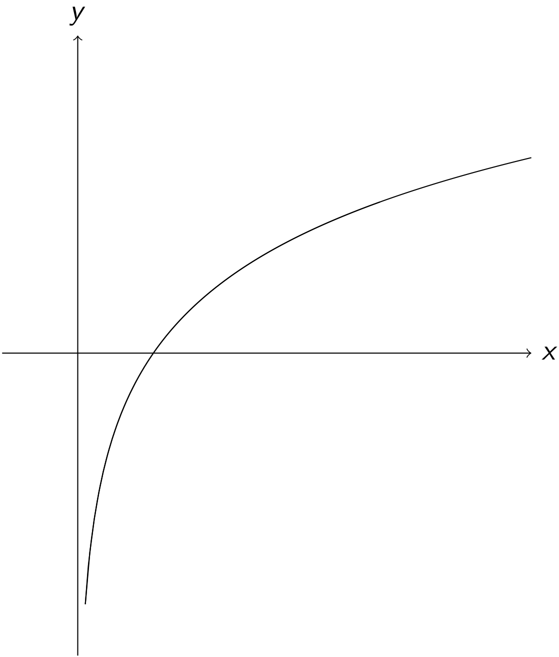


Grafico del logaritmo $y = \log_2(x)$.

Funzione logaritmica

Caso $0 < a < 1$

- Poiché l'argomento del logaritmo deve essere sempre positivo, il dominio $D = (0, +\infty)$;
- se $x = 1$ allora $y = \log_a(1) = 0$, quindi il grafico passa per il punto $(1, 0)$;
- $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, se $x_1 < x_2$ si ha $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$, quindi $f(x_1) > f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente decrescente.

Metodo del carbonio-14

Tra il 1944 e il 1955 il chimico Libby mise a punto un metodo di datazione dei materiali di origine organica con il carbonio-14. Il C-14 è un isotopo che rimane costante nell'atmosfera e anche in ogni sistema organico vivente. Però, con la morte, cessa il suo assorbimento e il C-14 accumulato diminuisce negli anni seguendo l'andamento della funzione esponenziale

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

dove C_0 e k sono due costanti e rappresentano, rispettivamente, la concentrazione del carbonio-14 nell'atmosfera e il suo decadimento. La conoscenza di tali costanti e del valore $C(t)$ permette a paleontologi e archeologi di datare i fossili o altri ritrovamenti di interesse storico.

Metodo del carbonio-14

Infatti

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

$$\frac{C(t)}{C_0} = e^{-kt}$$

$$\log\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) = -kt$$

$$\log(C(t)) - \log(C_0) = -kt$$

$$t = \frac{1}{k}[\log(C_0) - \log(C_t)]$$

Scala logaritmica

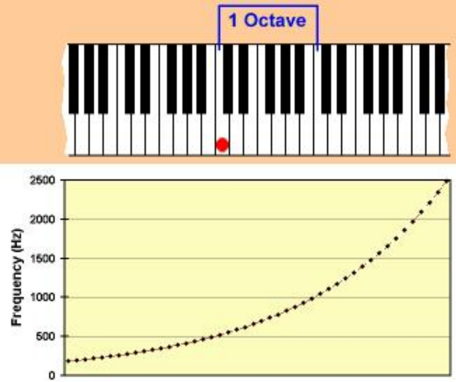
L'orecchio umano, se sufficientemente allenato, è in grado di individuare lla distanza tra due suoni, che in musica prende il nome di *intervallo*.
L'altezza è uno dei tre caratteri fisici del suono, e da un punto di vista percettivo permette di distinguere un suono *acuto* da uno *grave*. Da un punto di vista fisico il suono è un'onda, e l'altezza indica la frequenza ν dell'onda.
Grazie agli studi sul funzionamento del nostro apparato uditivo, a partire dalla *teoria posizionale* (1863) di Helmholtz è stato dimostrato che l'ampiezza percepita di un intervallo musicale non si basa sulle differenze delle frequenze fra i due suoni che lo compongono, ma sul loro rapporto.

Quindi, data una nota, per ottenerne un'altra basta moltiplicare o dividerne la frequenza per un dato numero a seconda che la nota sia più acuta o più grave. Quindi non percepiamo la differenza tra due frequenze ma la differenza fra i loro logaritmi. Infatti, applicando il logaritmo al rapporto fra due frequenze $\frac{\nu_2}{\nu_1}$:

$$\log \frac{\nu_2}{\nu_1} = \log \nu_2 - \log \nu_1$$

Ne consegue che la disposizione più naturale delle frequenze è quella in scala logaritmica.

Funzione logaritmica



Il grafico nota-frequenza è una curva esponenziale. Il grafico frequenza-nota è una curva logaritmica.

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

Consideriamo $f(x) = |x|$.
Ricordiamo che, per definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico di f è dato dai grafici delle due funzioni

$$f_+(x) = x \qquad \text{con } x \geq 0$$
$$f_-(x) = -x \qquad \text{con } x < 0$$

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

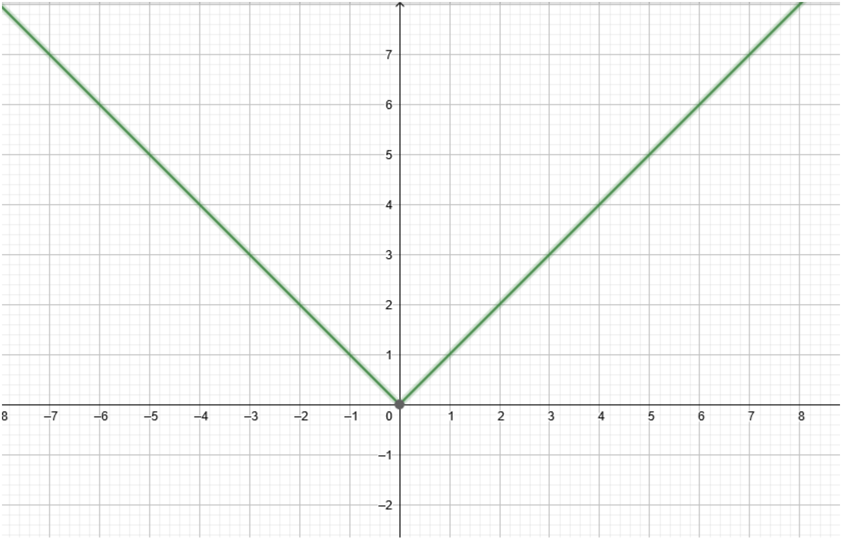


Figura: $y = |x|$

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

Più in generale, data una funzione elementare $y = E(x)$ vogliamo determinare il grafico di $f(x) = |E(x)|$.
Dalla definizione di valore assoluto

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x) & \text{se } E(x) \geq 0 \\ -E(x) & \text{se } E(x) < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il grafico di $f(x) = |E(x)|$ lasciando invariate le parti in cui la funzione è positiva (cioè al di sopra dell'asse x), e ribaltando rispetto all'asse x quelle negative (cioè che si trovano al di sotto dell'asse x).

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

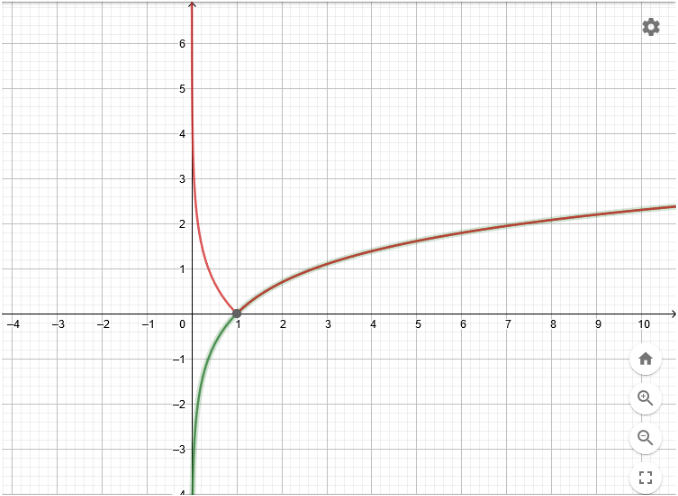


Figura: In verde $y = \log(x)$, in rosso $y = |\log(x)|$. La parte comune alle due funzioni è quella nell'intervallo $[1, +\infty)$

Funzioni quasi elementari: traslazione verticale di una funzione elementare

Sia $y = E(x)$ una funzione elementare. Il grafico della funzione $f(x) = E(x) + k$ si otterrà traslando verticalmente $y = E(x)$ di k unità

- verso l'alto se $k > 0$;
- verso il basso se $k < 0$.

Esempio

La retta $f(x) = x + 2$ si ottiene traslando verticalmente $E(x) = x$ di 2 unità verso l'alto.

Esempio

La funzione $f(x) = e^x - 3$ si ottiene traslando verticalmente $E(x) = e^x$ di 3 unità verso il basso.

Funzioni quasi elementari: traslazione orizzontale di una funzione elementare

Sia $y = E(x)$ una funzione elementare. Il grafico della funzione $f(x) = E(x + k)$ si otterrà traslando orizzontalmente $y = E(x)$ di k unità

- verso sinistra se $k > 0$;
- verso destra se $k < 0$.

Esempio

La retta $f(x) = x + 2$ si ottiene traslando orizzontalmente $E(x) = x$ di 2 unità verso sinistra.

Esempio

La funzione $f(x) = \log(x - 1)$ si ottiene traslando orizzontalmente $E(x) = \log(x)$ di 1 unità verso destra.