Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Limiti

Sonia Cannas

A.A. 2019/2020

Retta ampliata

Definizione (Retta ampliata)

Si definisce **retta reale ampliata** *(o* **estesa***)*

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Intorni di un numero reale

Definizione (Intorno)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$*. Si definisce* **intorno** *di* x_0 *di ampiezza* ϵ *l'insieme dei numeri reali* x *che distano meno di* ϵ *da* x_0*, cioè*

$$I_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} | d(x, x_0) < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < \epsilon\}$$

Osservazione

L'intorno di x_0 di ampiezza ϵ è l'insieme dei punti dell'intervallo

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

Infatti $I_\epsilon(x_0)$ è l'insieme dei numeri reali x tali che

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad & -\epsilon < x - x_0 < \epsilon \\ & -\epsilon + x_0 < x < \epsilon + x_0 \\ & x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \end{aligned}$$

Per ogni intorno $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ possiamo distinguere

- l'intorno destro $[x_0, x_0 + \epsilon)$;
- l'intorno sinistro $(x_0 - \epsilon, x_0]$.

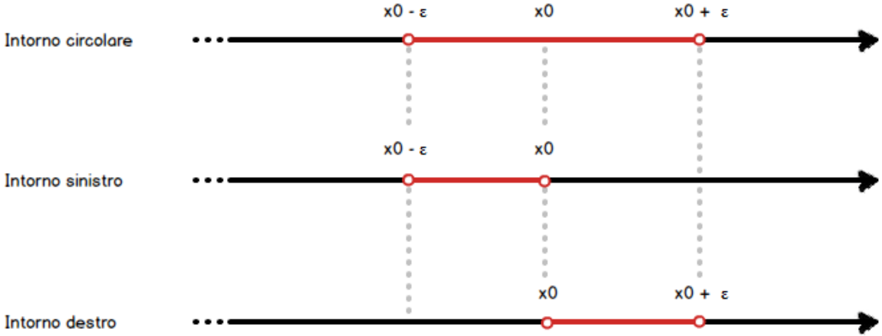


Figura: Intorno di x_0 di raggio ϵ

Definizione (Punto interno)

Un punto x si dice **interno** *ad $A \subseteq \mathbb{R}$ se:*

- $x \in A$;
- *esiste un suo intorno $I_\epsilon(x) \subset A$.*

Esempio

Consideriamo $A = [-1, 3)$. Il punto $x = 2$ è interno ad A poiché appartiene ad A ed esiste un suo intorno contenuto in A, ad esempio $I_{\frac{1}{2}}(2) \subset [1, 3)$.

Definizione (Punto esterno)

Un punto x si dice **esterno** *ad $A \subseteq \mathbb{R}$ se:*

- $x \notin A$;
- *esiste un suo intorno $I_\epsilon(x) \subset \bar{A}$ (o, equivalentemente, tale che $I_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$).*

Esempio

Consideriamo $A = [-1, 3)$. Il punto $x = 4$ è esterno ad A poiché non appartiene ad A ed esiste un suo intorno contenuto nel complementare $\bar{A}$, ad esempio $I_{\frac{1}{3}}(4) \subset (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$.

Definizione (Punto di frontiera)

Un punto x si dice **di frontiera** *per $A \subseteq \mathbb{R}$ se non è né interno né esterno, cioè se ogni suo intorno contiene almeno un punto di A e almeno un punto del complementare $\bar{A}$.*

Esempio

Consideriamo $A = [-1, 3)$. I punti $x = -1$ e $x = 3$ sono di frontiera per A, infatti qualsiasi sia l'ampiezza ϵ dei loro intorni $I_\epsilon(-1)$ e $I_\epsilon(3)$ entrambi contengono sia punti di A che del complementare $\bar{A}$.

Definizione (Punto di accumulazione)

Un punto $x \in \mathbb{R}^*$ è **di accumulazione** *per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni suo intorno contiene almeno un punto di A distinto da x.*

Osservazione

I punti di accumulazione di un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$ sono i punti interni e di frontiera di A.

Esempio

Consideriamo $A = [-1, 3)$. Sono punti di accumulazione $-1, 3, 0, 2, -\frac{1}{3}, \dots$. I punti di accumulazione sono tutti quelli che appartengono all'intervallo $[-1, 3]$.

Definizione informale di limite

A cosa servono i limiti?

Lo scopo della nozione di **limite** è descrivere rigorosamente il comportamento di una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "vicino" ad un punto di accumulazione del suo dominio A.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per A. Possiamo "far tendere" x a x_0 (in simboli $x \to x_0$) e studiare cosa succede alle immagini $f(x)$.

Definizione informale di limite

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che il limite della funzione f è uguale a L, per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se i valori assunti da f sono vicini quanto si vuole a L in corrispondenza di tutti i punti x sufficientemente vicini a x_0.

Definizione informale di limite

Esempio

Consideriamo la funzione elementare $f(x) = e^x$.
Ricordiamo che il dominio $D = (-\infty, +\infty)$.
Osserviamo che

- quando x assume valori via via più piccoli (tendenti a $-\infty$) la funzione si avvicina sempre più alla quota $y = 0$, rimanendone sempre al di sopra, senza mai raggiungerla. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

- quando x assume valori via via più grandi (tendenti a $+\infty$) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a $+\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Esempio

Consideriamo la funzione elementare $f(x) = \log(x)$.
Ricordiamo che il dominio $D = (0, +\infty)$.
Osserviamo che

- quando x si avvicina a 0 da destra (tende a 0^+) le ordinate sono negative e diventano sempre più grandi in valore assoluto, ovvero tendono a $-\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$$

- quando x assume valori via via più grandi (tendenti a $+\infty$) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a $+\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

Osservazione

Il punto x_0 è di accumulazione, quindi può anche non appartenere al dominio, perciò $f(x_0)$ può non essere definito.
Anche se $f(x_0)$ è definito può essere diverso dal limite L.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$ abbiamo $f(0) = 0$. Ma $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Definizione di limite

Definizione (Limite (per intorni))

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *sia* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *un punto di accumulazione per* A *e sia* $L \in \mathbb{R}^*$. *Diremo che il limite di* f, *per* $x \to x_0$, *è uguale a* L, *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se per ogni intorno I_L *di* L *esiste un intorno* I_{x_0} *tale che per ogni* $x \in A$ *di tale intorno la sua immagine* $f(x)$ *appartiene all'intorno* I_L.

Definizione di limite

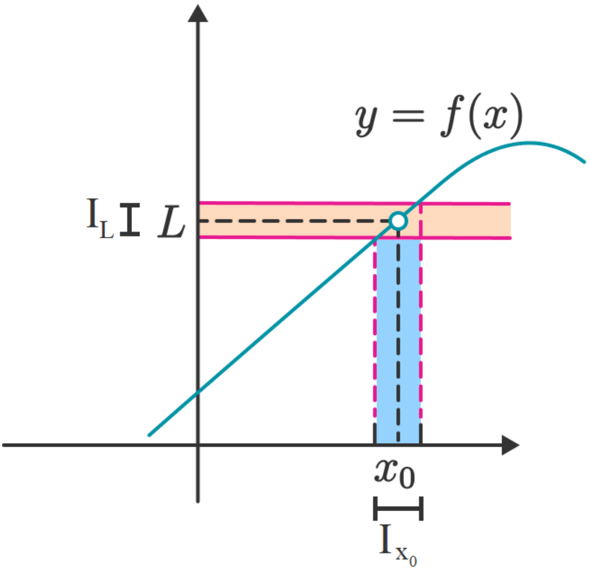


Figura: Definizione di limite per intorni

Definizione di limite

Nel caso in cui x_0 e L siano finiti possiamo descrivere gli intorni come intervalli di ampiezza δ e ϵ rispettivamente. In questo modo la definizione di limite può essere espressa equivalentemente come segue.

Definizione (Limite (con ϵ e δ))

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e sia $L \in \mathbb{R}$. Diremo che il limite di f, per $x \to x_0$, è uguale a L, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se per ogni ampiezza $\epsilon > 0$ esiste un'ampiezza $\delta > 0$ tale che se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Definizione di limite

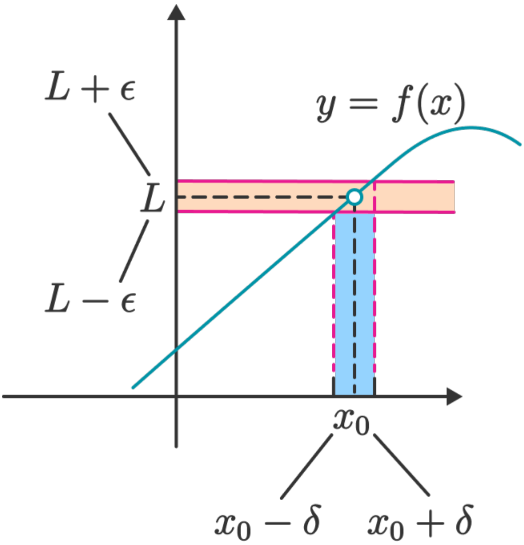


Figura: Definizione di limite con ϵ e δ

Asintoti verticali e orizzontali

Definizione (Asintoto verticale)

Sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio di una funzione f. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

il grafico della funzione ha un **asintoto verticale** *di equazione $x = x_0$.*

Esempio

Il grafico della funzione $f(x) = \log(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Asintoti verticali e orizzontali

Definizione (Asintoto orizzontale)

Sia f una funzione definita in un intorno di $+\infty$ (o $-\infty$). Se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

il grafico della funzione ammette un **asintoto orizzontale** *di equazione $y = L$.*

Esempio

Il grafico della funzione $f(x) = e^x$ ammette un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ poiché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Operazioni con i limiti

Teorema

Siano $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni e x_0 un punto di accumulazione per A. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{1}$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è $+\infty$ e l'altro $-\infty$)

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{2}$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è ∞ e l'altro 0)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \tag{3}$$

(l'uguaglianza perde significato se i due limiti al secondo membro sono entrambi infiniti o nulli)

Calcolo dei limiti: forme di indeterminazione

Per il teorema sulle operazioni con i limiti abbiamo visto che se la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite, per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$, è elementare o è somma/prodotto/quoziente di funzioni elementari, il limite si calcola con una semplice sostituzione.

Il calcolo dei limiti può portare alle seguenti 7 **forme di indeterminazione** o **indecisione**:

1. $+\infty - \infty$ (o $-\infty + \infty$);
2. $0 \cdot \infty$;
3. $\dfrac{\infty}{\infty}$;
4. $\dfrac{0}{0}$;
5. 1^{∞};
6. 0^{0};
7. ∞^{0}.

Calcolo dei limiti: forme di indeterminazione

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - x) = \infty - \infty = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\infty \cdot 0 = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1 - x^2} = \frac{+\infty}{-\infty} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to1} \frac{\log(x)}{x - 1} = \frac{0}{0} = ?$$

Attenzione

La forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$ indica un limite in cui numeratore e denominatore **tendono** a 0, non che essi assumono il valore 0. Quindi

$$\lim_{x\to 1} \frac{5^0 - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{0}{x-1}$$

non è una forma indeterminata, poiché

$$\frac{0}{x-1} = 0$$

prima ancora di calcolarne il limite.

Attenzione

Analogamente, la forma di indeterminazione 1^∞ indica il limite di una potenza la cui base **tende** a 1 e l'esponente ad infinito. Quindi è una forma di indeterminazione del tipo 1^∞ il limite seguente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ma non lo è

$$\lim_{x\to\infty} 1^x$$

poiché

$$1^x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Calcolo dei limiti: funzioni polinomiali

Sia
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \ldots, n\}, a_n \neq 0.$
Possiamo calcolare il seguente limite raccogliendo $a_n x^n$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} P(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + \cdots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (3x^2 - 4x) &= \lim_{x\to+\infty} 3x^2 \left(1 - \frac{4x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 \left(1 - \frac{4}{3x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty\end{aligned}$$

Per calcolare il $\lim_{x\to\infty} P(x)$ basta calcolare il limite del termine di grado massimo.

Ordini di infinito

Le funzioni $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x$ sono entrambe *infinite*.

Definizione (Funzione infinita)

Una funzione f si dice **infinita** *per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Le funzioni infinite possono essere infiniti di ordine diverso.

Definizione

Sia g una funzione infinita per $x \to x_0$. Una funzione f è un infinito di ordine a ($a \in \mathbb{R}$) quando esiste il seguente limite finito e diverso da 0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

La funzione g svolge il ruolo di infinito campione, intuitivamente si può pensare come una sorta di "unità di misura" rispetto alla quale si valuta la velocità con cui tende all'infinito la funzione f.

Ordini di infinito

Esempio

Calcoliamo l'ordine di infinito di $f(x) = x^3$ per $x \to +\infty$.
Come infinito campione scegliamo $g(x) = x$. Dobbiamo determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che il seguente limite sia finito e diverso da zero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^a}$$

Ciò accade se e solo se $a = 3$, quindi $f(x) = x^3$ è un infinito di ordine 3 per $x \to +\infty$ rispetto a $g(x) = x$.

Ordine di infinito delle funzioni polinomiali

Per le funzioni polinomiali, se si assume $g(x) = x$ come infinito campione, l'ordine di infinito per $x \to +\infty$ è dato dal grado del polinomio.

Ordini di infinito

Definizione

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to \infty$. Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tale limite è uguale a

- 0 *diremo che f è infinito di ordine inferiore rispetto a g;*
- $k \neq 0$ *diremo che f e g sono infiniti dello stesso ordine;*
- ∞ *diremo che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g;*
- $\nexists$, *in tal caso i due infiniti non sono confrontabili.*

Siano $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ due polinomi.
Nel calcolo dei limiti di queste funzioni possiamo trovare due forme di indeterminazione.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ nel calcolo di limiti per $x \to \infty$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^8+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{x^8\left(1+\frac{1}{x^8}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^8} = 0$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2}{3-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^4}\right)}{-2x^4\left(\frac{3}{-2x^4}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{-2x^4} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$ nel calcolo di limiti per $x \to x_0$

Se si verifica la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ significa che $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, quindi entrambi i polinomi sono divisibili per $(x - x_0)$. L'indeterminazione si può rimuovere scomponendo i due polinomi in fattori e semplificando la frazione.

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$$

Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$ *con* F *infinito di ordine superiore rispetto a* f *per* $x \to x_0$;
- $y = g(x) + G(x)$ *con* G *infinito di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad \text{(forma indeterminata)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^4}$$

Calcolo dei limiti: gerarchie degli infiniti

La funzione esponenziale di base $a > 1$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi funzione potenza con esponente $b > 0$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2018x^{100}} = +\infty$$

Qualsiasi funzione funzione potenza con esponente $b > 0$ è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza con esponente $c > 0$ della funzione logaritmica di base $a > 1$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\log_a x)^c} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{589 \log^{100}(x)} = +\infty$$

Ordini di infinitesimi

Definizione (Funzione infinitesima)

Una funzione f si dice **infinitesima** *per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Come per le funzioni infinite, esistono infinitesimi di diverso ordine.

Definizione

Sia g una funzione infinitesima per $x \to x_0$. Una funzione f è un infinitesimo di ordine a ($a \in \mathbb{R}$) quando esiste il seguente limite finito e diverso da 0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

La funzione g svolge il ruolo di infinitesimo campione.

Ordini di infinitesimi

Esempio

Calcoliamo l'ordine di infinitesimo di $f(x) = x^3$ per $x \to 0$.
Come infinitesimo campione scegliamo $g(x) = x$. Dobbiamo determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che il seguente limite sia finito e diverso da zero:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^a}$$

Ciò accade se e solo se $a = 3$, quindi $f(x) = x^3$ è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0$ rispetto a $g(x) = x$.

Ordine di infinitesimo delle funzioni polinomiali

Per le funzioni polinomiali, se si assume $g(x) = x$ come infinitesimo campione, l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ è dato dal termine di grado minimo.

Ordini di infinitesimi

Definizione

Siano f e g due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tale limite è uguale a

- 0 *diremo che f è infinitesima di ordine superiore rispetto a g;*
- $k \neq 0$ *diremo che f e g sono infinitesime dello stesso ordine;*
- ∞ *diremo che f è infinitesima di ordine inferiore rispetto a g;*
- $\nexists$, *in tal caso i due infinitesimi non sono confrontabili.*

Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$ *con* F *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* f *per* $x \to x_0$;
- $y = g(x) + G(x)$ *con* G *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Asintoti obliqui

Teorema

Il grafico di una funzione f ammette la retta $y = mx + q$ quale asintoto obliquo se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$
3. $$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

Asintoti obliqui

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x+2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{x+2} = -1$$

Quindi la funzione $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ per $x \to +\infty$ possiede come asintoto obliquo la retta $y = x - 1$.

Asintoti obliqui

Esempio

La funzione $y = \log(x)$ non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

Esempio

La funzione $y = e^x$ non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Funzioni continue

Definizione (Funzione continua)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A \cap A'$ (cioè x_0 è un punto di accumulazione che appartiene al dominio A). Diremo che f è **continua** *in x_0 quando*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero quando

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \;\; se \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ &allora \quad f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \end{aligned}$$

Funzioni continue

Esempi di funzioni continue

- $y = c$, con $c \in \mathbb{R}$ (funzioni costanti = rette orizzontali);
- le funzioni lineari;
- le funzioni potenza $y = x^n$
- le funzioni esponenziali $y = a^x$;
- le funzioni logaritmiche $y = \log_a(x)$
- le funzioni trigonometriche $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$.

Condizione necessaria e sufficiente per funzioni continue

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in un punto x_0 se e solo se il limite sinistro e destro per $x \to x_0$ esistono e sono uguali a $f(x_0)$, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Discontinuità

Discontinuità

Una funzione si dice **discontinua** se non è continua.

Discontinuità eliminabile

x_0 è una discontinuità eliminabile quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale discontinuità è eliminabile poiché il limite destro e sinistro per $x \to 0$ esistono e sono uguali a 0, ma in $x = 0$ la funzione assume il valore $f(0) = 1$, quindi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

Discontinuità

Discontinuità di prima specie

x_0 è una discontinuità di prima specie se il limite sinistro e destro per $x \to x_0$ esistono finiti, ma sono diversi fra loro, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = c \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = d \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad c \neq d$$

Esempio

La funzione $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$.

Infatti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Discontinuità

Discontinuità di seconda specie

x_0 è una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) per $x \to x_0$ non esiste o esiste infinito

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ è una discontinuità di seconda specie, infatti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Massimi e minimi

Definizione (Massimo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce **massimo** *di A un numero $M \in A$ tale che*

$$M \geq a \qquad \forall a \in A$$

Definizione (Minimo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce **minimo** *di A un numero $m \in A$ tale che*

$$m \leq a \qquad \forall a \in A$$

Esempio

Sia $A = [1, 4]$. Il massimo e il minimo di A sono rispettivamente

$$M = 4 \qquad m = 1$$

Osservazione

Non sempre esistono il massimo e il minimo.
Controesempio: l'intervallo $(1, 4)$ non ammette né massimo né minimo.

Massimi e minimi di una funzione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$ e I_{x_0} un intorno di x_0.

Definizione (Massimo locale)

Diremo che x_0 è un punto di **massimo locale** *(o relativo) se*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Esempio

La parabola $y = -x^2$ ha un massimo locale in $x = 0$.

Definizione (Minimo locale)

Diremo che x_0 è un punto di **minimo locale** *(o relativo) se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Massimi e minimi di una funzione

Definizione (Massimo globale)

Diremo che x_0 *è un punto di* **massimo globale** *(o assoluto) se*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Esempio

La parabola $y = -x^2$ ha un massimo globale in $x = 0$.

Definizione (Minimo globale)

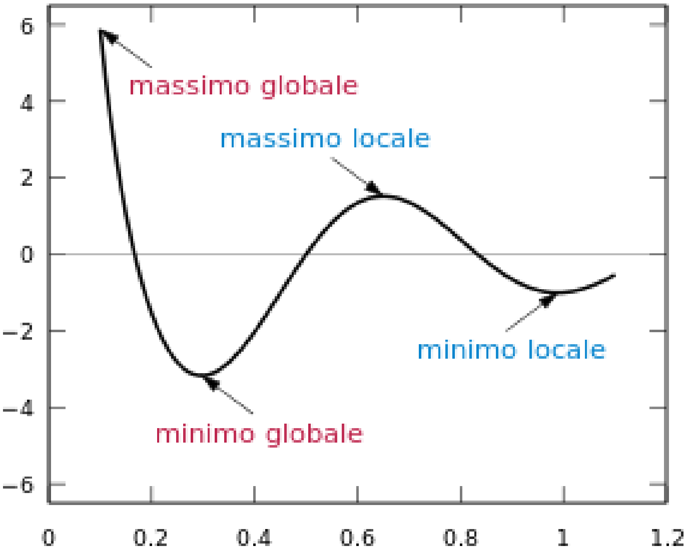
Diremo che x_0 *è un punto di* **minimo globale** *(o assoluto) se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Esempio

La funzione $y = |x^2 - 1|$ ammette due minimi globali per $x = -1$ e $x = 1$ e un massimo locale per $x = 1$. Non ci sono massimi globali.

Massimi e minimi di una funzione



Teorema (di Weierstrass)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$[a]*.*

[a] Gli intervalli con gli estremi inclusi sono chiusi e limitati.

Esempio

La retta $y = 2x$ è una funzione continua. Se restringiamo il suo dominio ad un intervallo chiuso e limitato, ad esempio $[1, 3]$, sono soddisfatte le ipotesi del teorema. Di conseguenza vale la tesi, infatti essa ammette un minimo globale in $x = 1$ ($y = 2$ è il valore minimo assunto dalla funzione in $[1, 3]$) e un massimo globale in $x = 3$ ($y = 6$ è il valore minimo assunto dalla funzione in $[1, 3]$).

Teorema di Darboux e degli zeri

Teorema (di Darboux (o dei valori intermedi))

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume, almeno una volta, tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo.

Osservazione

Il massimo e il minimo esistono poiché le ipotesi sono le stesse del teorema di Weierstrass.

Teorema (degli zeri)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, quindi esiste un punto $c \in [a, b]$ che interseca l'asse x. Se è possibile determinare tale punto c per via algebrica si può utilizzare il **metodo di bisezione**.

Metodo di bisezione

1. Sia $c = \dfrac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato il punto d'intersezione tra f e l'asse x. Se $f(c) \neq 0$ si va avanti.
2. Si individua in quale fra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ la funzione f ammette valori discordi e si ripete il procedimento del passo precedente utilizzando il nuovo intervallo individuato.
3. Si itera il procedimento finché non si giunge ad un intervallo che consente di approssimare lo zero con la precisione voluta.

Metodo di bisezione

Esempio

La funzione $f(x) = 2^x + x$ nell'intervallo $[-1, 0]$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri poiché

- $[-1, 0]$ è un intervallo chiuso e limitato;
- $f(x)$ è continua in $[-1, 0]$;
- $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ e $f(0) = 1 > 0$;

quindi esisterà un punto $c \in [-1, 0]$ t.c. $f(c) = 0$. Per determinarlo dovremmo risolvere l'equazione $2^x + x = 0$, ma essa non è risolubile per via algebrica. Possiamo localizzare la soluzione dell'equazione utilizzando il metodo di bisezione.

- Sia $c = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Poiché $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,21 \neq 0$ andiamo avanti.
- Poiché $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0,21 > 0$ iteriamo il ragionamento sull'intervallo $[-1, -\frac{1}{2}]$.
- Sia $c = \dfrac{-1-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{3}{4}$. Poiché $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) \simeq -0,16 < 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}\right]$.
- Sia $c = \dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{5}{8}$. Poiché $f\left(-\dfrac{5}{8}\right) \simeq 0,02 > 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{5}{8}, -\dfrac{3}{4}\right]$.
- Sia $c = \dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{5}{8}}{2} = -\dfrac{11}{16}$. Poiché $f\left(-\dfrac{11}{16}\right) \simeq -0,07 < 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{11}{16}, -\dfrac{5}{8}\right]$.