Appunti di Geometria Analitica

Prof.ssa Sonia Cannas

Liceo Classico *"Siotto Pintor*

Anno Scolastico 2019-2020

Indice

Capitolo 1

Dalla geometria euclidea sintetica alla geometria analitica

Per molti secoli l'ambito matematico di maggior interesse fu la geometria. Fino agli inizi della civiltà greca la matematica si sviluppò grazie alla necessità di risolvere problemi pratici, molti dei quali di tipo geometrico (calcolare l'area di un terreno, suddividerlo in più parti di diverse forme, costruire edifici, ecc...). Con la civiltà greca, a partire da Talete, si cominciò invece a risolvere non solo problemi particolari con dati particolari, ma anche problemi di tipo generale.

Esempio 1. *Supponiamo ad esempio di dover risolvere un problema in cui, dato un rettangolo di perimetro* $P = 50m$ *si cercano i valori che devono avere i lati* a *e* b *affinché l'area sia massima. I Greci non si limitavano a risolvere solamente questo particolare problema, cercavano di trovare la soluzione del problema più generale: dato un rettangolo di assegnato perimetro* P *trovare qual è quello di area massima.*

Fu nella civiltà greca che cominciarono anche diversi interessi nei confronti dell'algebra, in particolare nello studio di equazioni di primo e secondo grado. Tali studi ebbero il periodo di maggior sviluppo nel 1400 e nel 1500 d.C. Fino a tali secoli lo sviluppo dell'algebra fu sempre separato da quello della geometria. Dal 1600 con Cartesio si cominciò a legare queste due discipline matematiche, l'algebra diventò uno strumento per risolvere problemi geometrici, e fu coSi che nacque la *geometria analitica*.

1.1 Il piano cartesiano

Il primo matematico che utilizzò l'algebra per risolvere problemi geometrici fu Cartesio. La sua idea fu quella di rappresentare certe grandezze non note attraverso incognite e risolvere il problema geometrico attraverso equazioni. Il suo nome oggi è associato al noto *piano cartesiano*, in realtà non fu lui ad attribuire tale nome al sistema di riferimento del piano che stiamo per descrivere, anche perché lui stesso non fece uso di un sistema di riferimento del genere. Il piano cartesiano come lo conosciamo oggi nacque dopo Cartesio, e si sviluppò a partire dalla fondamentale idea di Cartesio di legare l'algebra alla geometria.

Vediamo ora di spiegare cos'è il piano cartesiano, a cosa serve e come si costruisce.

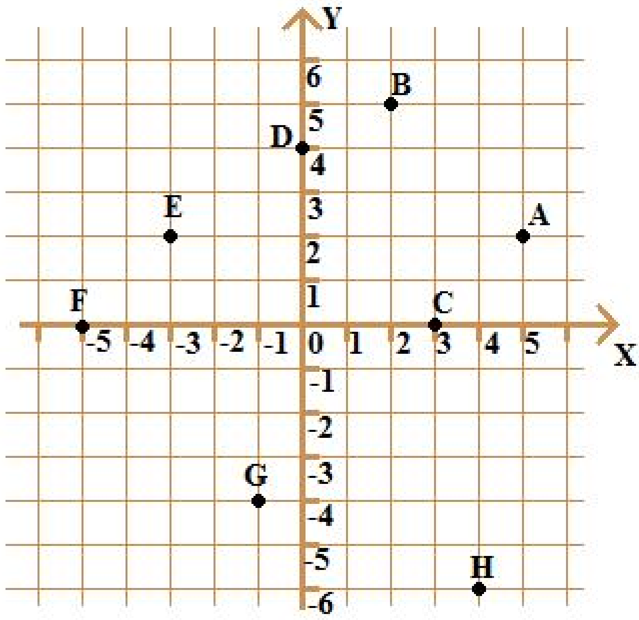
Molti di voi probabilmente conosceranno il gioco battaglia navale. Si tratta di un gioco per due giocatori: ciascuno possiede certo numero di navi da organizzare in una griglia in modo segreto e il proprio avversario deve indovinare in quali caselle della griglia si trovano le sue navi. Vince chi trova per primo tutte le navi dell'avversario. Ogni punto della griglia in cui è possibile disporre le navi è individuato da delle coordinate formate da una lettera e da un numero.

Il *piano cartesiano* è un sistema di riferimento simile a quello del gioco *battaglia navale*, infatti è coSi costruito:

- sono scelte due rette perpendicolari, una orizzontale e una verticale, il cui punto d'intersezione è indicato con la lettera O ed è detto *origine (del sistema di riferimento)*;

- la retta orizzontale è chiamata *asse delle ascisse* (o *asse x*), quella verticale è detta *asse delle ordinate* (o *asse y*);
- su ogni retta viene scelto un verso di percorrenza, quello dell'asse delle ascisse va da sinistra verso destra, quello dell'asse delle ordinate va dal basso verso l'alto;
- su ogni retta viene stabilita un'unità di misura, essa è arbitraria, ma spesso si preferisce scegliere la stessa unità di misura su entrambi gli assi (in tal caso il sistema di riferimento è detto *monometrico*.

Come già visto nella geometria euclidea sintetica nel piano si possono rappresentare vari enti geometrici, tra questi anche i punti (e ricordiamo che il punto è una nozione primitiva). Quindi una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano possiamo rappresentarvi tutti i punti attraverso una coppia ordinata di numeri reali[1] che si indica con $(x; y)$ o (x, y). Il primo dei due numeri indica la coordinata x del punto, detta anche *ascissa*, il secondo la coordinata y, detta anche *ordinata*. Complessivamente, i due numeri di tale coppia sono detti *coordinate* del punto.



Esempio 2. *Nel grafico a lato sono rappresentati i punti aventi le seguenti coordinate:*

$A = (5; 2)$
$B = (2; 5)$
$C = (3; 0)$
$D = (0; 4)$
$E = (-3; 2)$
$F = (-5; 0)$
$G = (-1; -4)$
$H = (4; -6)$

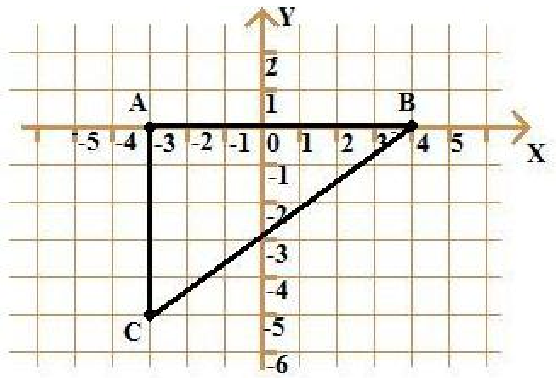
Osservazione 1. *I punti A e B sono rappresentati entrambi dai numeri 2 e 5, ma osserviamo che sono punti diversi (se fossero uguali coinciderebbero). Infatti la coppia di numeri che rappresenta le coordinate deve essere ordinata, ciò significa che la prima coordinata è distinta dalla seconda, se esse vengono scambiate si ottiene un punto diverso. Ecco perché*

$$A = (5; 2) \neq (2; 5) = B$$

Il piano cartesiano resta diviso dagli assi in quattro angoli; ciascuno di questi quattro angoli, esclusi i punti appartenenti agli assi, è detto **quadrante**. Convenzionalmente i quadranti sono numerati dal primo in alto a destra in senso antiorario.

[1] I numeri reali sono tutti i numeri che si possono rappresentare in una retta, li approfondiremo più avanti.

1.2 Distanza tra due punti



Nel disegno a lato sono rappresentati i punti A, B e C e i segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.
La figura risultante è un triangolo rettangolo. Per calcolare il perimetro è necessario misurare la lunghezza di tutti i lati.

Calcolare la lunghezza dei lati paralleli agli assi il calcolo è immediato, basta "contare i quadretti". Se però avessimo avuto un triangolo rettangolo dove i quadretti fra A e B sono molti, sarebbe troppo dispendioso calcolarli tutti. In tal caso conviene misurare la lunghezza di $\overline{AB}$ algebricamente, cioè lavorando numericamente con le coordinate.

Più in generale, supponiamo di avere un segmento $\overline{A'B'}$ parallelo all'asse x (quindi orizzontale). Avremo delle coordinate del tipo: $A' = (x_1, y_1)$ e $B' = (x_2, y_1)$[2]. Supponiamo che $x_1 < x_2$, quindi il punto B' si trova a destra rispetto al punto A'. Contare i quadretti per misurare la lunghezza di segmenti orizzontali equivale a calcolare la differenza fra l'ascissa del punto a destra e quello del punto a sinistra, cioè:

$$d(A, B) = \overline{A'B'} = x_2 - x_1$$

Quindi nell'esercizio 9, poiché $A = (x_1, y_1) = (-3, 0)$ e $B = (x_2, y_1) = (4, 0)$ si ha:

$$d(A, B) = \overline{AB} = x_2 - x_1 = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

Osserviamo che se invertissimo l'ordine delle ascisse nel calcolo della distanza otterremmo

$$d(A, B) = x_1 - x_2 = -3 - 4 = -7$$

Ma una distanza non può essere negativa, e contando i quadretti da sinistra a destra o da destra a sinistra otteniamo sempre lo stesso numero positivo. Esiste uno strumento matemtico che permette di risolvere questo problema: il **valore assoluto**.

Valore assoluto

Definizione 1 (Valore assoluto)**.** *Sia $x \in \mathbb{R}$. Si definisce **valore assoluto** di x, e si indica con $|x|$, il numero reale coSi definito:*

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Osservazione 2. *Il valore assoluto di un numero reale è sempre un numero non negativo: infatti $|x|$ è uguale a se stesso quando x è positivo o nullo (e quindi rimane positivo), mente è uguale all'opposto di x quando x è negativo (ed essendo l'opposto di un numero negativo diventa positivo). Inoltre $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.*

Esempio 3. $|3| = 3$ *poiché* $3 > 0$.
$|-2| = -(-2) = 2$ *poiché* $-2 < 0$.

[2] L'ordinata y_1 del punto A' è la stessa di B' perché stiamo considerando un segmento parallelo all'asse x, quindi tutti i punti di tale segmento hanno ordinata y_1.

Geometricamente il valore assoluto di un numero può essere interpretato come la distanza fra il punto che lo rappresenta sulla retta e l'origine.

Esempio 4. *Il punto* -4 *dista* 4 *unità dall'origine, infatti* $|-4| = 4$.

Torniamo al nostro problema sul calcolo della distanza fra due punti. Più precisamente, se i punti sono allineati orizzontalmente possiamo determinare la loro distanza calcolado il valore assoluto della differenza fra le due ascisse:

$$d(A, B) = \overline{AB} = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| \tag{1.2}$$

Infatti dati $A = (x_1, y_1) = (-3, 0)$ e $B = (x_2, y_1) = (4, 0)$ si ha:

$$d(A, B) = \overline{AB} = |x_1 - x_2| = |4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7$$
$$d(A, B) = \overline{AB} = |x_2 - x_1| = |-3 - 4| = |-3 - 4| = |-7| = 7$$

Discorso analogo vale anche per i segmenti paralleli all'asse delle ordinate, cioè quelli verticali. Supponendo di avere un $\overline{A'C'}$ parallelo all'asse y con $A' = (x_1, y_1)$ e $B' = (x_1, y_2)$, con $y_1 > y_2$ (quindi A' è "sopra" C') allora:

$$d(A', C') = \overline{A'C'} = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1| \tag{1.3}$$

Infatti poiché nell'esercizio 9 $A = (x_1, y_1) = (-3, 0)$ e $C = (x_1, y_2) = (-3, -5)$ si ha:

$$d(A, C) = \overline{AC} = |y_1 - y_2| = |0 - (-5)| = |5| = 5$$

Il problema più grosso si pone per il segmento $\overline{BC}$. Essendo obliquo non si possono "contare i quadretti". Si può calcolare la sua lunghezza applicando il teorema di Pitagora. Quindi:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \sqrt{74}$$

In tal modo abbiamo quindi calcolato la lunghezza del segmento $\overline{BC}$, cioè la distanza fra i punti B e C.

La *formula della distanza fra due punti* quindi è una formula che si ricava semplicemente applicando il teorema di Pitagora. Come tutte le formule non è da imparare a memoria, quando non la si ricorda basta ricavarla applicando il teorema di Pitagora secondo il ragionamento che segue. Supponiamo di avere i punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Possiamo pensare il segmento $\overline{AB}$ come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di vertici A, B e $C = (x_1, y_2)$. Quindi, applicando il teorema di Pitagora:

$$d(A, B)^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Quindi la formula per la distanza fra due punti A e B è la seguente:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.4}$$

Capitolo 2

Rette nel piano cartesiano

2.1 Luoghi geometrici

Come già anticipato, la geometria analitica è quella parte della matematica che studia e deduce le proprietà di certi luoghi geometrici mediante il calcolo algebrico, cioè con un metodo analitico.

Definizione 2 (Luogo geometrico). *Un* luogo geometrico piano *è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una data proprietà.*

La geometria sintetica invece utilizza il metodo sintetico per indagare sulle prorpietà delle figure, e tale metodo consiste nel dedurre tali proprietà a partire da alcune ipotesi, mediante ragionamenti che si sviluppano "all'interno" della geometria stessa (per esempio senza l'aiuto dell'algebra).

Abbiamo già visto che il metodo analitico è stato sviluppato nella prima metà del XVII secolo per merito di Cartesio e Fermat, con l'intento di fornire un metodo generale per la risoluzione dei problemi geometrici: tale metodo non solo è spesso più semplice e potente di quello sintetico, ma trova anche numerose applicazioni nel campo tecnico-scientifico.

Ogni proprietà caratteristica dei punti di un luogo può essere tradotta in una relazione algebrica tra l'ascissa e l'ordinata dei punti della figura, ossia un'equazione del tipo:

$$F(x, y) = 0$$

Ciò significa che se un punto $P = (x_0, y_0)$ appartiene al luogo espresso dall'equazione $F(x, y) = 0$ le sue coordinate soddisfano tale relazione, cioè $F(x_0, y_0) = 0$. Viceversa, se la coppia di numeri reali (x_0, y_0) soddisfa $F(x, y) = 0$, cioè $F(x_0, y_0) = 0$ allora il punto avente per coordinate tale coppia di numeri reali appartiene al luogo geometrico.

Nel caso in cui $F(x, y) = 0$ rappresenti un numero finito di operazioni sulle variabili x e y quali l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice, l'equazione è detta *equazione algebrica* e la curva che la rappresenta *curva algebrica*. In caso contrario di parla di *equazione trascendente* e *curva trascendente*.

Nello studio della geometria analitica che svolgeremo ci limiteremo a considerare due casi:

1. $F(x, y)$ è un polinomio di primo grado in x e y, in tal caso si ha la seguente equazione algebrica:

$$F(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad ax + by + c = 0 \qquad a \neq 0 \text{ o } b \neq 0$$

   e tale equazione rappresenta un luogo geometrico già noto: la retta;

2. $F(x, y)$ è un polinomio di secondo grado in x e y in tal caso si ha la seguente equazione algebrica:

$$F(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

   e tale equazione, se ha soluzioni, rappresenta una conica, cioè uno dei seguenti luoghi geometrici: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.

2.2 Richiami sulle equazioni

Definizione 3 (Equazione). *Un'equzione è un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una o più variabili dette* incognite.

Risolvere un'equazione significa trovare, se esistono, i valori che sostituiti alle incognite rendono vera l'uguaglianza.

Esempio 5. *Questi sono alcuni esempi di equazioni:*

$$x + 8 = 5 \qquad \textit{(Equazione di primo grado in una incognita)}$$
$$2 + x^2 = 4x \qquad \textit{(Equazione di secondo grado in una incognita)}$$
$$x^3 + 3x + 4 = 2x^2 \qquad \textit{(Equazione di terzo grado in una incognita)}$$
$$x + y = 2 \qquad \textit{(Equazione di primo grado in due incognite)}$$
$$y + 3x^2 = 34x + 6 \qquad \textit{(Equazione di secondo grado in due incognite)}$$
$$2x^2 + y^2 - 3x = 4y + 5 \qquad \textit{(Equazione di secondo grado in due incognite)}$$

Dall'esempio precedente si può dedurre la definizione di *grado* di un'equazione:

Definizione 4 (Grado di un'equazione). *Si definisce* grado *di un'equazione il massimo esponente a cui è elevata l'incognita (o le incognite nel caso di equazioni in più variabili).*

Le equazioni sono utilissime per ricavare formule fisiche, risolvere problemi logici, problemi geometrici, per esprimere matematicamente luoghi geometrici (vedremo come si possono rappresentare rette e altre curve famose attraverso un'equazione) e tanto altro.

Come si può notare dagli esempi ogni equazione ha un'espressione a sinistra dell'uguale e una a destra. Ciò che è a sinistra dell'uguale è detto *primo membro*, ciò che è a destra *secondo membro*. Essi possono essere pensati come i piatti di una bilancia in cui ci sono vari pesetti noti (cioè i numeri) e altri pesetti incogniti di cui non si conosce il peso (le incognite). Lo scopo è quello di trovare, se esiste, il valore del peso incognito (o dei pesi incogniti nel caso di equazioni in più variabili). Per farlo basta aggiungere o togliere pesetti ai due piatti in modo tale che la bilancia rimanga sempre in equilibrio, quindi se si aggiunge un pesetto da 2 kg nel piatto sinistro lo si deve aggiungere anche nel piatto destro, oppure se si tolgono 7 kg dal piatto destro li si devono togliere anche dal piatto sinistro.

Ciò significa che per risolvere un'equazione matematicamente bisogna:

- sommare o sottrarre la stessa quantità a sinistra e destra dell'uguale;
- dividere o moltiplicare per la stessa quantità a sinistra e a destra dell'uguale, purché tale quantità sia diversa da 0[1]!

2.2.1 Equazioni di primo grado

Supponiamo di avere una bilancia in cui in un piatto ci sono due pesetti uguali di cui non conosciamo il peso, e nell'altro piatto c'è un pesetto di 8 kg. Quanto pesa il pesetto incognito?

Il problema può essere espresso attraverso la seguente equazione:

$$2x = 8$$

Risolvere tale equazione significa trovare qual è quel numero che moltiplicato per 2 dà 8. Troviamo la soluzione:

$$2x = 8 \qquad \text{(dividiamo entrambi i membri per 2)}$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \qquad \text{(semplifichiamo le frazioni)}$$
$$x = 4$$

[1] Se si moltiplicassero entrambi i membri dell'equazione per 0 otterremo l'equazione $0 = 0$, cioè otterremo una bilancia con i piatti vuoti, ma non è la soluzione del problema. Dividere per 0 è ancora peggio: la divisione per zero non ha senso! (Non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia un numero diverso da zero).

Il numero cercato è 4, quindi i due pesetti incogniti uguali misurano ciascuno 4 kg.

Osservazione 3. *Aggiungere e togliere una stessa quantità ad entrambi i membri dell'equazione per semplificare un valore equivale a spostare quel termine all'altro membro cambiandolo di segno. Infatti se avessimo:*

$$x + 5 = 8 \qquad \textit{(togliamo 5 ad entrambi i membri per avere solo l'incognita x al primo membro)}$$
$$x + 5 - 5 = 8 - 5 \qquad \textit{(sommiamo)}$$
$$x = 3$$

l'equazione potrebbe essere risolta più velocemente saltando il passaggio in cui togliere 5 *ad entrambi i membri scrivendo direttamente:*

$$x = 8 - 5$$

Tali equazioni permettono di risolvere problemi pratici di vario tipo.

Esempio 6. *Supponiamo di voler ripartire la somma di* 2000 *euro fra* 3 *persone in modo che la prima abbia* 100 *euro in più della seconda e la seconda* 200 *euro in più della terza. Trovare la somma di denaro che spetta a ciascuno.*

Per prima cosa bisogna decidere quale somma di denaro considerare come incognita: se la somma data alla prima persona, quella data alla seconda oppure quella data alla terza.

Supponiamo di indicare con x la somma di denaro data alla seconda persona. In tal caso la somma spettante alla prima sarà $x + 100$ e la somma per la terza sarà $x - 200$. Le tre somme di denaro in totale dovranno dare 2000*, quindi il problema si riduce allo svolgimento di questa equazione:*

$$x + 100 + x + x - 200 = 2000 \qquad \textit{(spostiamo i termini noti al secondo membro)}$$
$$x + x + x = 2000 - 100 + 200 \qquad \textit{(sommiamo i termini simili)}$$
$$3x = 2100 \qquad \textit{(dividiamo entrambi i membri per il coefficiente della x)}$$
$$x = 700$$

Quindi alla seconda persona spettano 700 *euro, alla prima* $700 + 100 = 800$ *euro, alla terza* $700 - 200 = 500$ *euro. Osserviamo che* $700 + 800 + 500 = 2000$*, quindi il risultato è corretto.*

Esempio 7. *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai $\frac{3}{4}$ dell'altro. Sapendo che la somma dei cateti è* 21 *m determinare la lunghezza die due cateti.*

Indichiamo con $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ i due cateti. I dati che abbiamo sono:

$$\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AC}$$
$$\overline{AB} + \overline{AC} = 21m$$

Conviene considerare $\overline{AC} = x$. Con tale scelta $\overline{AB} = \frac{3}{4}x$. Quindi il nostro problema si riduce allo svolgimento della seguente equazione:

$$\frac{3}{4}x + x = 21$$
$$\frac{7}{4}x = 21$$
$$7x = 84$$
$$x = \frac{84}{7}$$
$$x = 12$$

Quindi $x = \overline{AC} = 12$ m e $\overline{AB} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ m.

Esempio 8. *Determina un numero reale il cui doppio, aumentato di* 1*, sia uguale al suo doppio.*

Indichiamo con x *il numero cercato. Il problema si formalizza nel modo seguente:*

$$2x + 1 = 2x \qquad \textit{(sottraendo } 2x \textit{ ad entrambi i membri)}$$
$$2x + 1 - 2x = 0 \qquad \textit{(sottraendo } 1 \textit{ ad entrambi i membri)}$$
$$2x - 2x = -1 \qquad \textit{(sommando i termini simili)}$$
$$0x = -1$$

L'equazione è quindi impossibile, cioè non ha soluzione. Infatti non esiste nessun numero che moltiplicato per 0 *dia* -1*.*

Esempio 9. *Determinare i quattro numeri interi consecutivi la cui somma sia* 4*.*

Indichiamo con x *il più piccolo numero fra i tre consecutivi cercati. Il suo consecutivo sarà* $x + 1$*, il consecutivo di quest'ultimo sarà* $x + 2$ *e il suo consecutivo sarà* $x + 3$*. Poiché la somma di tali tre numeri deve essere* 4 *il problema può essere formalizzato attraverso questa equazione:*

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4 \qquad \textit{(sommando i termini al primo membro)}$$
$$4x + 6 = 4 \qquad \textit{(sottraendo il valore } 6 \textit{ ad entrambi i membri)}$$
$$4x = 4 - 6 \qquad \textit{(sommando i termini al secondo membro)}$$
$$4x = -2 \qquad \textit{(dividendo entrambi i membri per } 4\textit{)}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Il problema però richiedeva che i numeri fossero interi[2] *quindi, avendo trovato una soluzione razionale non intera*[3]*, tale problema non ha soluzione.*

Esempio 10. *Determina un numero reale che, sottratto a sè stesso meno* 1*, dia come risultato* 1*.*

Indichiamo con x *il numero reale cercato. Il problema si può formalizzare nel seguente modo:*

$$x - (x - 1) = 1 \qquad \textit{(togliendo le parantesi e ricordando di cambiare di segno)}$$
$$x - x + 1 = 1 \qquad \textit{(sottraendo } 1 \textit{ ad entrambi i membri)}$$
$$x - x = 0 \qquad \textit{(sommando i termini simili al primo membro)}$$
$$0x = 0$$

L'equazione è quindi indeterminata, cioè ha infinite soluzioni. Infatti qualsiasi numero x *moltiplicato per* 0 *dà* 0*.*

2.2.2 Equazioni con frazioni i cui denominatori non contengono l'incognita

Vediamo ora come si risolvono le equazioni in cui compaiono frazioni, i cui denominatori non contengono però l'incognita (quindi contengono solo numeri).

Poiché un'equazione rimane equivalente a se stessa se si moltiplicano entrambe le parti per uno stesso numero diverso da 0, la sua risoluzione può essere resa più semplice: moltiplicando tutti i termini per il denominatore comune si possono "eliminare" tutti i denominatori.

[2] L'insieme dei numeri interi si indica con $\mathbb{Z}$ ed è formato dai numeri naturali e dai loro opposti, cioè $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

[3] L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$ ed è costituito da tutti i numeri che si possono esprimere attraverso una frazione. Osserviamo che i numeri interi si possono anche scrivere come frazione con 1 al denominatore, quindi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Esempio 11.

$\dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{2x+1}{2}$ *(moltipliachiamo ambo i membri per* 2*)*

$2 \cdot \dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{2x+1}{2} \cdot 2$ *(semplifichiamo)*

$1-2x = 2x+1$ *(portiamo tutte le incognite al primo membro e i termini noti al secondo memebro)*

$-4x = 0$ *(Cerchiamo il numero* x *che moltiplicato per* -4 *sia* 0*)*

$x = 0$

Esempio 12.

$\dfrac{x-3}{6} + 2 = \dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1}{6}$ *(riduciamo tutti i termini allo stesso denominatore)*

$\dfrac{x-3+12}{6} = \dfrac{2(x-2)-1}{6}$ *(moltiplichiamo ambo i membri per il denominatore comune)*

$6 \cdot \dfrac{x-3+12}{6} = \dfrac{2(x-2)-1}{6} \cdot 6$ *(semplifichiamo)*

$x-3+12 = 2x-4-1$ *(sommiamo i termini simili)*

$x+9 = 2x-5$ *(portiamo tutte le incognite al primo membro e i termini noti al secondo memebro)*

$-x = -14$ *(dividiamo entrambi i membri per* -1*)*

$x = 14$

Esempio 13.

$\dfrac{2x+3}{2} - \dfrac{3x+2}{3} = \dfrac{5}{6}$ *(il minimo comune multiplo è* 6*, riduciamo tutti i termini ad esso)*

$\dfrac{3(2x+3)-2(3x+2)}{6} = \dfrac{5}{6}$ *(moltiplichiamo ambo i membri per il denominatore comune)*

$6 \cdot \dfrac{3(2x+3)-2(3x+2)}{6} = \dfrac{5}{6} \cdot 6$ *(semplifichiamo)*

$3(2x+3)-2(3x+2) = 5$ *(svogliamo i prodotti applicando la proprietà distributiva)*

$6x+9-6x-4 = 5$ *(sommiamo i termini simili)*

$0x+5 = 5$

È chiaro a questo punto che l'equazione è indeterminata, infatti qualsiasi numero x *moltiplicato per* 0 *e addizionato a* 5 *dà come risultato* 5*. Se uno non lo vede subito può portare i termini noti tutti al secondo memebro:*

$$0x = 5-5$$
$$0 = 0$$

Sempre vero (0 *è uguale a* 0*), quindi l'equazione è indeterminata.*

Come abbiamo già visto, quando in un problema si vuole determinare il valore di una grandezza, spesso il primo passo da fare è formalizzare il problema, cioè riscrivere in formule il testo attraverso un'equazione. Vediamo ora altri esempi.

Esempio 14. *Con lo sconto del* 15% *ho pagato* 60 *euro un paio di scarpe. Qual è il prezzo originario?*

Indichiamo con x *l'incognita:*

$$x = \text{ prezzo originario}$$

Rileggendo il testo esprimiamo in forma algebrica l'enunciato:

$$x - \frac{15}{100}x = 60$$

Ora risolviamo l'equazione:

$$
\begin{aligned}
& x-\frac{15}{100}x=60 \qquad \textit{(Moltiplichiamo ambo i membri per } 100\textit{)} \\
& 100\cdot\left(x-\frac{15}{100}x\right)=60\cdot 100 \qquad \textit{(Eseguiamo i prodotti)} \\
& 100x-15x=6000 \qquad \textit{(sommiamo i termini simili)} \\
& 85x=600 \qquad \textit{(dividendo entrambi i membri per } 85\textit{)} \\
& x=\frac{6000}{85} \\
& x=70,6
\end{aligned}
$$

Il prezzo originale è di 70 *euro e* 60 *centesimi.*

2.3 La retta: equazione in forma implicita

In un piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano, una qualsiasi retta è un luogo geometrico rappresentato unicamente da un'equazione del tipo

$$ax+by+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0 \text{ o } b\neq 0 \tag{2.1}$$

Tale equazione è detta *in forma implicita*.

Esempio 15. *Le seguenti equazioni rappresentano tutte delle rette:*

$$
\begin{aligned}
& 2x+8y+3=0 \qquad 3x-5y+6=0 \qquad 20x+78y-34=0 \\
& -23x+65y-3=0 \qquad -32x-7y-3=0 \qquad -x-7y+4=0 \\
& 2x-4=0 \qquad -3y+9=0
\end{aligned}
$$

Nell'ultima riga dell'esempio 15 sono state indicate delle rette rispettivamente con $b=0$ e $a=0$. Prendiamo in considerazione la retta $2x-4=0$. Dalle proprietà delle equazioni sappiamo che essa si può esprimere equivalentemente nel seguente modo:

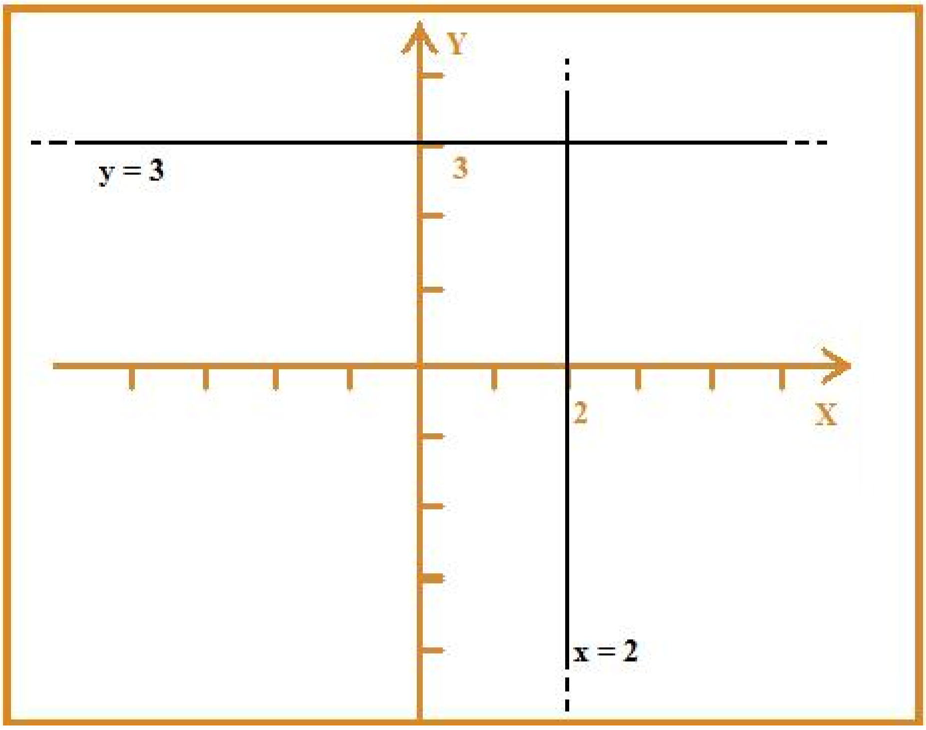
$$2x=4 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

La retta $x=2$ indica l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano aventi ascissa $x=2$, si tratta quindi di una retta verticale, cioè parallela all'asse y.

In modo analogo la retta $-3y+9=0$ si può esprimere equivalentemente nel seguente modo:

$$-3y=-9 \quad\Rightarrow\quad 3y=9 \quad\Rightarrow\quad y=3$$

e indica l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano aventi ordinata $y=3$, si tratta quindi di una retta orizzontale, cioè parallela all'asse x.



In generale quindi:

$$\begin{aligned}
\text{Equazione retta verticale (parallela all'asse y)}: &\quad x = s \qquad s \in \mathbb{R} \\
\text{Equazione retta orizzontale (parallela all'asse x)}: &\quad y = s \qquad s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Conseguentemente le rette che rappresentano gli assi cartesiani si rappresentano analiticamente attraverso le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\text{Equazione asse x}: &\quad y = 0 \\
\text{Equazione asse y}: &\quad x = 0
\end{aligned}$$

2.4 Rappresentazione una retta nel piano cartesiano data la sua equazione in forma esplicita

Data l'equazione di una retta vogliamo ora spiegare come riuscire a rappresentarla graficamente sul piano cartesiano. Per quanto riguarda le rette orizzontali e verticali la loro rappresentazione è molto semplice, lo abbiamo visto nel paragrafo precedente. Per quanto riguarda tutte le altre rette si ragiona nel modo seguente.

Lo scopo è quello di trovare tutti i punti $P = (x, y)$ che soddisfano l'equazione della retta. Per trovare tali punti l'equazione della retta 2.1 in forma implicita non è molto comoda, è preferibile esplicitare una delle due variabili (per convenzione si sceglie la y):

$$\begin{aligned}
ax + by + c =&0 \quad \Rightarrow \quad by = -ax - c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}y - \frac{c}{b} \\
\Rightarrow \quad y =& mx + q \qquad \text{con } m = -\frac{a}{b} \quad q = -\frac{c}{b}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Una retta espressa attraverso un'equazione del tipo 2.2 è detta *in forma esplicita*.

Osservazione 4. *Per determinare la 2.2 si suppone $b \neq 0$. Quindi è possibile esprimere in forma esplicita tutte le rette eccetto quelle verticali.*

Il valore $m = -\frac{a}{b}$ della 2.2 indica la pendenza della retta e viene detto *coefficiente angolare*, invece $q = -\frac{c}{b}$ indica l'ordinata del punto $Q = (0; q)$, intersezione della retta con l'asse y (cioè con

$x = 0$) ed è detto *termine noto* o *ordinata all'origine*.

Per disegnare una retta data la sua equazione possiamo procedere nel modo seguente.

1. Determinare l'equazione in forma esplicita della retta;
2. sostituire un valore a piacere x_0 alla x;
3. poiché $y = mx + q$, si calcola $mx_0 + q$ e tale valore indicherà la coordinata y_0 del punto della retta $P = (x_0, y_0)$.

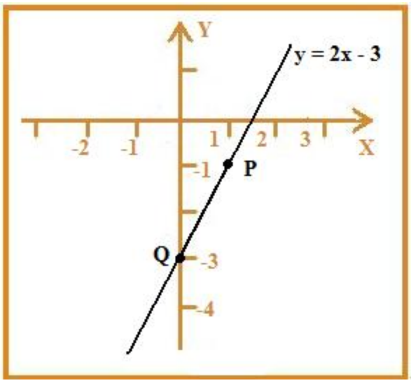
In questa maniera viene trovato un punto della retta. Un solo punto però non è sufficiente per individuare la retta espressa dall'equazione data (per un punto passano infinite rette), perciò si ripete lo stesso ragionamento per trovare un secondo punto.

Poiché per due punti passa una ed una sola retta prolungando il segmento che congiunge i due punti si ottiene la retta desiderata.

Esempio 16. *Rappresentiamo graficamente la retta $-2x + y + 3 = 0$. Osserviamo che si tratta effettivamente di una retta poiché della forma 2.1. Trasformiamola in forma esplicita:*

$$-2x + y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 3$$

Diamo un valore a piacere x_0 alla x in modo da ottenere l'ordinata y_0 del punto $P = (x_0; y_0)$ che appartiene alla retta.



Conviene scegliere il valore x_0 in modo da dover fare pochi calcoli per trovare y_0, ad esempio si può scegliere $x_0 = 0$. Sostituendo tale valore si ha:

$$y_0 = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$$

Quindi il punto $P = (0, -3)$ è un punto della nostra retta. Per determinarla ci serve un altro punto. Scegliamo un nuovo valore x_1, ad esempio $x_1 = 1$.

Sostituendolo nell'equazione della retta abbiamo:

$$y_1 = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1$$

Quindi il punto $Q = (1, -1)$ è un altro punto della nostra retta. Congiungendo i due punti trovati e prolungando il segmento $\overline{PQ}$ si ottiene la retta desiderata.

Osserviamo che se nell'equazione $y = mx + k$ immaginiamo che m sia costante e k sia un paramentro reale variabile, si ottiene, al variare di k, l'insieme di tutte le infinite rette parallele alla retta r di equazione $y = mx$. Tale insieme è detto **fascio improprio** di rette.

2.5 Retta passante per un punto e di direzione assegnata

Una retta di coefficiente angolare m ha equazione della forma $y = mx + q$. Per individuare l'equazione della retta passante per un punto assegnato $P = (x_0, y_0)$ occorre ricavare il valore di q. Imponendo alle coordinate di P di soddisfare l'equazione generica di una retta si ottiene:

$$y_0 = mx_0 + q \qquad \Rightarrow \qquad q = y_0 - mx_0$$

Sostituendo il valore di q coSi ricavato nell'equazione generica della retta si ottiene:

$$y = mx + y_0 - mx_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Quindi l'equazione di una retta passante per un punto assegnato $P = (x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m è:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{2.3}$$

Esempio 17. *Determiniamo l'equazione della retta passante per il punto $P = (-1, 6)$ e avente coefficiente angolare $m = -3$.*

Utilizzando la formula (2.3) si ha:

$$\begin{aligned} &y - y_0 = m(x - x_0) \\ &y - 6 = -3(x + 1) \\ &y = -3x - 3 + 6 \\ &y = -3x + 3 \end{aligned}$$

2.5.1 Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Utilizzando la 2.3 è possibile determinare facilmente:

- l'equazione della retta passante per un punto e parallela ad una retta data;
- l'equazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.

Teorema 1 (Condizione di parallelismo tra due rette)**.** *Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè:*

$$m = m' \tag{2.4}$$

Esempio 18. *Determinare l'equazione della retta passante per $P = (-1, 3)$ e parallela alla retta r di equazione $x - 2y + 1 = 0$.*

Poiché la retta cercata è parallela ad r essa avrà lo stesso coefficiente angolare. Scrivendo r in forma esplicita: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ osserviamo che il coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$.
Utilizzando la formula (2.3) riusciamo a determinare l'equazione della retta passante per $P = (-1, 3)$ e parallela a r:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Teorema 2 (Criterio di perpendicolarità tra due rette)**.** *Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari hanno come prodotto -1:*

$$mm' = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -\frac{1}{m'} \tag{2.5}$$

Esempio 19. *Determinare l'equazione della retta passante per $P = (3, 0)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = 2x$.*
Il coefficiente angolare della retta r è $m = 2$, per determinare il coefficiente angolare di una retta perpendicolare ad r basta imporre la condizione di perpendicolarità (2.5):

$$mm' = -1 \qquad \Rightarrow \qquad 2m' = -1 \qquad \Rightarrow \qquad m' = -\frac{1}{2}$$

Quindi la retta cercata ha coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{2}$. Utilizzando la (2.3) riusciamo a determinare l'equazione della retta cercata:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Osservazione 5. *Osserviamo che la 2.3 può essere guardata anche da un altro punto di vista: fissando x_0 e y_0 e supponendo che m sia un parametro variabile essa rappresenta le infinite rette passanti per $P = (x_0, y_0)$. L'insieme delle infinite rette passanti per un punto è detto **fascio proprio** di rette di centro $P = (x_0, y_0)$. Fa eccezione solamente la retta $x = x_0$, che non può essere ottenuta dalla 2.3 in corrispondenza di alcun valore di m.*

2.6 Retta passante per due punti

Determiniamo l'equazione di una retta di cui si conoscono le coordinate di due dei suoi punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

- Se $x_1 = x_2 = k$ allora la retta è parallela all'asse y, quindi la sua equazione è del tipo $x = k$.

  Esempio 20. *L'equazione della retta passante per $A = (1, 3)$ e $B = (1, -2)$ è $x = 1$.*

- Se $y_1 = y_2 = k$ allora la retta è parallela all'asse x, quindi la sua equazione è del tipo $y = k$.

  Esempio 21. *L'equazione della retta passante per $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 3)$ è $y = 3$.*

- Se i due punti non sono allineati su rette parallele agli assi la retta ha equazione $y = mx + q$.

  Lemma 1 (Coefficiente angolare della retta passante per due punti)**.** *Il coefficiente angolare m di una retta passate per due punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ è uguale al rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di A e B, in simboli:*

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \tag{2.6}$$

  Teorema 3. *Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. L'equazione della retta passante per P_1 e P_2 è data da*

  $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2.7}$$

  Dimostrazione. Per il lemma precedente, noti due punti della retta possiamo determinare il coefficiente angolare $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sostituendo tale valore di m nella formula della retta passante per un punto[4] e direzione assegnata si ha:

  $$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

  □

  Esempio 22. *Determinare l'equazione della retta passante per $A = (-2, 4)$ e $B = (1, -1)$.*

  Possiamo determinare l'equazione della retta utilizzando direttamente la formula 2.7:

  $$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - 4}{-1 - 4} &= \frac{x - (-2)}{1 - (-2)} \\ \frac{y - 4}{-5} &= \frac{x + 2}{1 + 2} \\ 15 \cdot \frac{y - 4}{-5} &= \frac{x + 2}{3} \cdot 15 \\ -3y + 12 &= 5x + 10 \\ -3y &= 5x - 2 \\ y &= -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

[4] Come punto si può scegliere indifferentemente uno dei due punti dati.

In alternativa, si può arrivare allo stesso risultato determinando il coefficiente angolare e poi utilizzando la formula della retta passante per un punto e avente direzione assegnata. Calcoliamo il coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{1-(-2)} = -\frac{5}{3}$$

Scriviamo l'equzione della retta di coefficiente angolare $m = -\frac{5}{3}$ *e passante per* A *o* B*. Per esempio utilizziamo* A*:*

$$y - 4 = -\frac{5}{3}(x-(-2)) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}$$

Appendice A

Esercizi

A.1 Piano cartesiano e distanza tra due punti

Esercizio 1. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (3;1) \quad B = (1;3) \quad C = (6;-2) \quad D = (-3;4) \quad E = (-2;-5)$$
$$F = (3;0) \quad G = (0;2) \quad H = (-4;0) \quad I = (0;-1) \quad L = (0;0)$$

Esercizio 2. *Rappresenta sul piano cartesiano i seguenti punti e calcolane la distanza.*

1. $A = (2,3)$ *e* $B = (2,-6)$ $[d(A,B) = 9]$
2. $C = (-5,4)$ *e* $D = (-3,4)$ $[d(C,D) = 2]$
3. $E = (3,1)$ *e* $F = (8,1)$ $[d(E,F) = 5]$
4. $G = (-2,6)$ *e* $H = (-2,-6)$ $[d(G,H) = 12]$

Esercizio 3. *Rappresenta sul piano cartesiano i seguenti punti e calcolane la distanza.*

1. $A = \left(\frac{4}{5}, 0\right)$ *e* $B = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $[d(A,B) = 1]$
2. $C = \left(-\frac{11}{10}, -\frac{1}{2}\right)$ *e* $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}\right)$ $[d(C,D) = 1]$

Esercizio 4. *Rappresenta sul piano cartesiano i seguenti punti e calcolane la distanza.*

1. $A = \left(-\frac{13}{15}, \frac{1}{3}\right)$ *e* $B = \left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{15}\right)$ $[d(A,B) = 2]$
2. $C = \left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{15}\right)$ *e* $D = \left(5, -\frac{49}{15}\right)$ $[d(C,D) = 4]$

Esercizio 5. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (0;0) \quad B = (5;0) \quad C = (5;-5) \quad D = (0;-5)$$

Disegnare i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$. *Individuare la figura geometrica ottenuta e calcolarne area e perimetro.*

Esercizio 6. *Determinare il perimetro del triangolo di vertici* $A = (2,2)$, $B = (-1,-2)$ *e* $C = (-10,7)$. $[18 + 9\sqrt{2}]$

Esercizio 7. *Verificare se il triangolo di vertici* $A = (3,4)$, $B = (-3,0)$ *e* $C = (9,-5)$ *è rettangolo.* [*Si*]

Esercizio 8. *Verificare se il triangolo di vertici* $A = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$, $B = \left(-2, \frac{3}{5}\right)$ *e* $C = (0,1)$ *è isoscele.* [*Si*]

Esercizio 9. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (-3;0) \quad B = (4;0) \quad C = (-3;-5)$$

Disegnare i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}$ *e* $\overline{CA}$. *Individuare la figura geometrica ottenuta e calcolarne area e perimetro.*

Esercizio 10. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (-2;0) \quad B = (4;0) \quad C = (3;-2) \quad D = (-1;-2)$$

Disegnare i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$. *Individuare la figura geometrica ottenuta e calcolarne area e perimetro.*

Esercizio 11. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (-2;0) \quad B = (0;4) \quad C = (2;0) \quad D = (0;-4)$$

Disegnare i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$. *Individuare la figura geometrica ottenuta e calcolarne area e perimetro.*

Esercizio 12. *Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti:*

$$A = (0;0) \quad B = (0;5) \quad C = (4;3) \quad D = (1;3)$$

Disegnare i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$. *Individuare la figura geometrica ottenuta e calcolarne area e perimetro.*

A.2 Equazione della retta

Esercizio 13. *Fra le seguenti equazioni quali rappresentano una retta?*

$$-\frac{1}{2}x + 7y = 0 \qquad 734y - \frac{5}{4}x + 28 = 0 \qquad 23x^2 = 34y$$
$$\sqrt{2}x + y = 3 \qquad x = 23 + y^3 \qquad 23x^2 + 16y^2 - 36 = 0$$
$$y = 0 \qquad 37x^5 = 23y + 5 \qquad \pi y = x + 3 \qquad x = 20$$

Esercizio 14. *Fra le seguenti equazioni quali rappresentano una retta?*

$$-\frac{1}{6}x + 8y - 2 = 0 \qquad 7y^4 - \frac{5}{8}x = 0 \qquad 3\sqrt{2}x = 34y$$
$$\sqrt{5}x + 2y = 3 \qquad x^2 = 2 + y \qquad 3x^2 + 16y^2 = 0$$
$$y = 0 \qquad x = 2 \qquad 21y = 6x + 3 \qquad x = 0$$

Esercizio 15. *Scrivi due equazioni a piacere che rappresentino rette.*

Esercizio 16. *Disegna il grafico di ciascuna delle seguenti rette:*

$$y = x - 1$$
$$y = -x + 3$$
$$y = 3x - 1$$
$$x = 2$$
$$y = 3$$

Esercizio 17. *Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti rette:* $y = x + 3$, $y = 3x - 2$, $x = 2$, $y = -3$.

Esercizio 18. *Rappresenta sul piano cartesiano la retta* r *di equazione* $2x - y + 4 = 0$. *Individua il coefficiente angolare e il punto d'intersezione con l'asse* y. *Verifica se* r *passa per i punti* $P = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$ *e* $Q = \left(\frac{3}{2}, 6\right)$.

Esercizio 19. *Rappresenta sul piano cartesiano la retta* r *di equazione* $y = 2x - 3$. *Individua il coefficiente angolare e il punto d'intersezione con l'asse* y. *Verifica che* r *passa per i punti* $P = (-3, -9)$ *e non passa per* $Q = \left(\frac{1}{8}, -\frac{5}{2}\right)$.

A.3 Rette passanti per un punto e direzione assegnata, passanti per due punti, condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Esercizio 20. *Per ciascuna delle seguenti coppie di punti determina il coefficiente angolare delle rette che individuano:*

1. $A = (2, 5)$ *e* $B = (3, 6)$ $[m = 1]$
2. $C = (-1, 3)$ *e* $D = (2, 5)$ $[m = \frac{2}{3}]$
3. $E = (0, 3)$ *e* $F = (5, 3)$ $[m = 0]$

Esercizio 21. *Determina se le rette* $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{7}$ *e* $y = \frac{5}{2}x - 2$ *sono parallele.* [*Si*]

Esercizio 22. *Determina se le rette* $y = \frac{10}{7}x + \frac{3}{2}$ *e* $y = -\frac{10}{7}x + 4$ *sono parallele.* [*No*]

Esercizio 23. *Determina se le rette* $y = \frac{10}{7}x + \frac{3}{2}$ *e* $y = -\frac{7}{10}x + 9$ *sono perpendicolari.* [*Si*]

Esercizio 24. *Determina se le rette* $y = x - 2$ *e* $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ *sono perpendicolari.* [*No*]

Esercizio 25. *Determina se le rette* $y = -\frac{4}{3}x - 2$ *e* $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ *sono perpendicolari.* [*Si*]

Esercizio 26. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $y = -2x + 1$ *e passante per il punto* $P = (3, -1)$. $[y = -2x + 5]$

Esercizio 27. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $x - 2y + 3 = 0$ *e passante per il punto* $P = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$. $[y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}]$

Esercizio 28. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $y = 4$ *e passante per il punto* $P = (1, 2)$. $[y = 2]$

Esercizio 29. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $3x + 4y = 0$ *e passante per il punto* $P = (-\frac{1}{2}, 3)$.

Esercizio 30. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $y = 4$ *e passante per il punto* $P = (1, 2)$. $[y = 2]$

Esercizio 31. *Determina l'equazione della retta parallela alla retta* $2x - \frac{1}{2}y + 4 = 0$ *e passante per il punto* $P = (2, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 32. *Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta* $2x - y + 1 = 0$ *e passante per il punto* $P = (2, 3)$. [$y = -\frac{1}{2}x + 4$]

Esercizio 33. *Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta* $y = x$ *e passante per il punto* $P = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

Esercizio 34. *Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta* $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{”}$ *e passante per il punto* $P = (1, 0)$.

Esercizio 35. *Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta* $4x - y + 2 = 0$ *e passante per il punto* $P = (-4, 3)$.

Esercizio 36. *Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta* $2x + 3y - 1 = 0$ *e passante per il punto* $P = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Esercizio 37. *Determina l'equazione della retta passante per i punti* $A = (-2, 3)$ *e* $B = \left(5, \frac{3}{4}\right)$.
[$y = -\frac{9}{28}x + \frac{33}{14}$]

Esercizio 38. *Determina l'equazione della retta passante per i punti* $A = (1, 3)$ *e* $B = \left(\frac{2}{3}, 3\right)$.

Esercizio 39. *Determina l'equazione della retta passante per i punti* $A = \left(\frac{3}{4}, 4\right)$ *e* $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Esercizio 40. *Determina l'equazione della retta passante per i punti* $A = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ *e* $B = \left(\frac{7}{4}, -1\right)$.

Esercizio 41. *Determina l'equazione della retta passante per i punti* $A = \left(4, -\frac{1}{5}\right)$ *e* $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{5}\right)$.

Esercizio 42. *Determina l'equazione della retta passante per* $A = (1, 1)$ *e perpendicolare alla retta passante per* $B = (0, 0)$ *e per* $C = (3, -3)$.

Esercizio 43. *Determina l'equazione della retta passante per* $A = (0, 2)$ *e perpendicolare alla retta passante per* $B = (-3, 1)$ *e per* $C = (1, 2)$.

Esercizio 44. *Determina l'equazione della retta passante per* $A = (2, 0)$ *e perpendicolare alla retta passante per* $B = \left(-2, \frac{13}{2}\right)$ *e per* $C = (-4, 5)$.