Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Derivate

Sonia Cannas

A.A. 2019/2020

Introduzione alle derivate: il rapporto incrementale

A cosa servono le derivate?

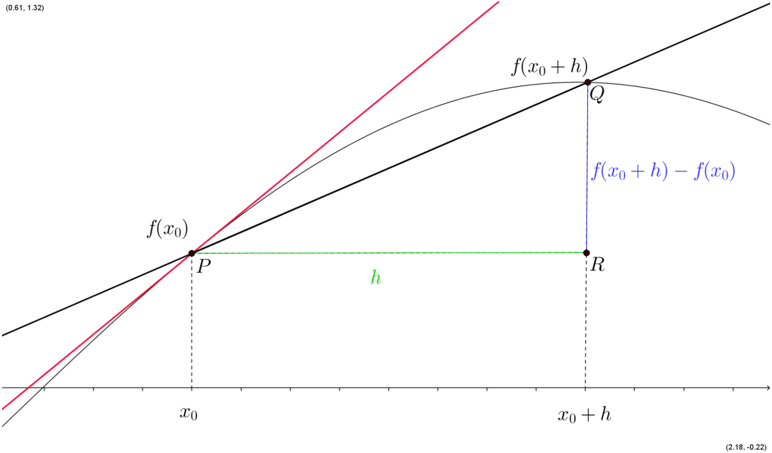
Lo scopo della nozione di **derivata** è quello di studiare la pendenza di un grafico in ogni suo punto $(x_0, f(x_0))$, quindi misura la crescita/decrescita della funzione al variare del punto x_0.

Definizione (Rapporto incrementale)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in A$. *Consideriamo un altro punto* $x_0 + h \in A$ *con* $h \neq 0$ *sufficientemente piccolo. Si definisce* **rapporto incrementale** $\dfrac{\Delta f}{h}$ *il rapporto fra l'incremento* $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ *e l'incremento* h*:*

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Significato geometrico del rapporto incrementale



$$P = (x_0, f(x_0)),\ Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Significato geometrico del rapporto incrementale

Interpretazione geometrica del rapporto incrementale

Il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i due punti $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Infatti

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f}{h} = \tan \beta$$

Quindi il rapporto incrementale rappresenta la pendenza della corda che congiunge i due punti P e Q della funzione f.

Per studiare la pendenza di f nel punto P basta considerare la pendenza della corda $\overline{PQ}$ e far tendere il punto $Q \to P$. Poiché la distanza tra $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ è $d(P, Q) = h$, cioè equivale a studiare il rapporto incrementale per $h \to 0$.

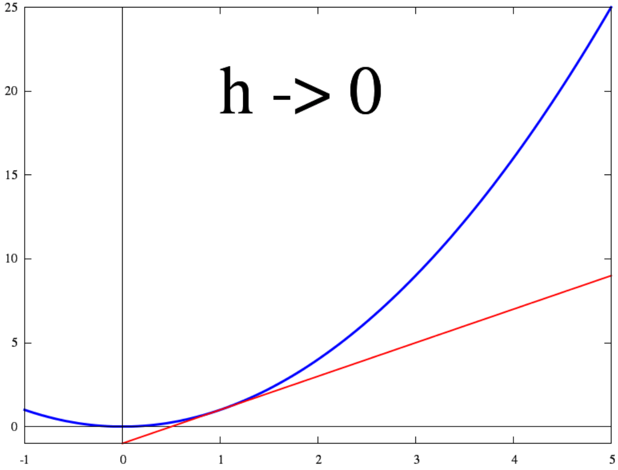
Definizione (Derivata)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce **derivata** *di f nel punto $x_0 \in A$, e si indica con $f'(x_0)$, il limite del rapporto incrementale per l'incremento che tende a 0*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

purché il limite esista e sia finito.

Derivata: significato geometrico



Animazione 1
Animazione 2

Derivata: significato geometrico

Interpretazione geometrica della derivata

La derivata $f'(x_0)$ di una funzione f in un suo punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 .
Infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \tan\beta = \tan\alpha$$

Quindi il rapporto incrementale rappresenta la pendenza del grafico della funzione in un punto.

Esempi di derivate

Esempio

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 0$ utilizzando la definizione.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

Infatti la retta tangente alla parabola $f(x) = x^2$ nel punto $x = 0$ è orizzontale, quindi il coefficiente angolare è 0.

Esempio

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 1$ utilizzando la definizione.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

Derivata di una potenza

Derivata di una potenza

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \tag{2}$$

Dimostrazione.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + h \cdot nx^{n-1} + \cdots + h^n - \cancel{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}\right)}{\cancel{h}} = nx^{n-1}$$

$\square$

Esempio

$$f(x) = x^{10} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$$

Derivata di una costante

$$f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \tag{3}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

□

Esempio

$$f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Derivata dell'esponenziale e del logaritmo

Derivata dell'esponenziale

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \tag{4}$$

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \log(a) \tag{5}$$

Derivata del logaritmo

$$f(x) = \log(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{6}$$

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \log(a)} \tag{7}$$

Osservazione

Se $f(x) = \log(4)$ allora $f'(x) = 0$ poiché $\log(4)$ è una costante.

Derivata di funzioni trigonometriche

Derivata di funzioni trigonometriche

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivata di una somma

La derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate:

$$D\left[f(x)+g(x)\right]=f'(x)+g'(x) \tag{8}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
D[f(x)+g(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}= \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}= \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}+\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}\right)= \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Esempio

La derivata di $f(x)=x^3+3x^2+e^x+\log(x)$ è $f'(x)=3x^2+6x+e^x+\dfrac{1}{x}$.

Derivata di un prodotto

La derivata di un prodotto è uguale al prodotto del primo fattore derivato per il secondo non derivato, più il prodotto del primo fattore non derivato per la derivata del secondo:

$$D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{9}$$

Esempio

La derivata di $f(x) = 5x^4 \cdot \log(x)$ è

$$f'(x) = 20x^3 \log(x) + 5x^4 \cdot \frac{1}{x} = 20x^3 \log(x) + 5x^3 =$$
$$= 5x^3(4\log(x) + 1)$$

Derivata di un quoziente

La derivata di un quoziente è uguale a un quoziente che ha, al denominatore, il quadrato del denominatore e, al numeratore, la differenza tra la derivata del numeratore, moltiplicata per il denominatore non derivato, e il numeratore non derivato moltiplicato per la derivata del denominatore:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{10}$$

Esempio

La derivata di $f(x) = \dfrac{5x^3}{\sin(x)}$ è

$$f'(x) = \frac{15x^2\sin(x) - 5x^3\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Derivata di una funzione composta

Derivata di una funzione composta

La derivata di una funzione composta è uguale alla derivata della funzione esterna moltiplicata per la derivata della funzione interna:

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \tag{11}$$

Esempio

Siano $g(x) = x^2$ e $f(x) = e^x$. Determiniamo $f(g(x))$ e calcoliamone la derivata:

$$x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = e^{x^2}$$

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

Determiniamo ora $g(f(x))$ e calcoliamone la derivata:

$$x \xrightarrow{f} e^x \xrightarrow{g} (e^x)^2 \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = e^{2x}$$

$$D\left[g\left(f(x)\right)\right] = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

Derivata di una funzione composta

Esempio

Siano $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^3 + 1$. Allora $f(g(x)) = (x^3 + 1)^4$ e la sua derivata è

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$$
$$= 4(x^3 + 1)^{4-1} \cdot (3x^{3-1} + 0) = 4(x^3 + 1)^3 \cdot 3x^2 =$$
$$= 12x^2(x^3 + 1)^3$$

Esempio

Siano $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \log(x)$. Allora $f(g(x)) = \sin(\log(x))$ e la sua derivata è

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$$
$$= \cos(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

Derivata di una funzione composta

Importante

Se la funzione composta è ottenuta dalla composizione di più di due funzioni la regola di derivazione si estende facilmente: la derivata si ottiene moltiplicando la derivata della funzione esterna per le derivate delle altre funzioni interne.

Esempio

Sia $h(x) = \log\left(\cos x^4\right)$. Allora la sua derivata è

$$h'(x) = \frac{1}{\cos x^4} \cdot \left(-\sin x^4\right) \cdot 4x^3 = -\frac{4x^3 \cdot \sin x^4}{\cos x^4}$$

Punti di non derivabilità

Derivabilità e non derivabilità

Una funzione f è derivabile in x_0 quando in tal punto esiste il limite del rapporto incrementale ed è finito. Ovvero, f è derivabile se:

- esistono finiti sia il limite sinistro sia il limite destro del rapporto incrementale;

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l_1 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l_2 \in \mathbb{R}$$

- tali limiti sono uguali

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x_0^-)$$

Equivalentemente, f è derivabile in x_0 quando:

- esistono finite sia la derivata sinistra sia quella destra;
- i valori delle due derivate coincido.

Se non valgono queste condizioni f non è derivabile in x_0.

Punti di non derivablità

Definizione (Punto angoloso)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in A$ si dice **angoloso** *se la derivata sinistra e la derivata destra in x_0 sono finite ma diverse*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l_1 \neq l_2 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_-(x_0^-)$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Essa presenta un punto angoloso in $x_0 = 0$, infatti

$$f'_+(0) = (x)' = 1$$
$$f'_-(0) = (-x)' = -1$$

quindi le derivate sinistra e destra esistono ma sono diverse.

Punti di non derivablità

Definizione (Cuspide)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in A$ si dice **cuspide** *se il limite sinistro e il limite destro del rapporto incrementale in x_0 sono infiniti e di segno opposto.*

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Essa presenta una cuspide in $x_0 = 0$, infatti

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{0-h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = -\infty$$

quindi i limiti dei rapporto incrementali sono infiniti e di segno opposto.

Punti di non derivablità

Definizione (Flesso a tangente verticale)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in A$ si dice **flesso a tangente verticale** *se il limite sinistro e il limite destro del rapporto incrementale in x_0 sono infiniti e hanno lo stesso segno.*

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Essa presenta un flesso a tangente verticale in $x_0 = 0$, infatti

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

quindi i limiti dei rapporto incrementali sono infiniti e con lo stesso segno.

Derivabilità e continuità

Teorema (Derivabilità $\Rightarrow$ continuità)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Dimostrazione.

Per ipotesi f è derivabile in x_0 quindi esiste finito il limite del rapporto incrementale per l'incremento che tende a 0, o equivalentemente

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Vogliamo dimostrare che f è continua in x_0, cioè che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Studiamo l'ultimo limite e verifichiamo che sia effettivamente uguale a 0. $\square$

Derivabilità e continuità

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))\cdot\frac{x-x_0}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = \\
&= f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = \\
&= f'(x_0)\cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$, perciò $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, di conseguenza f è continua. $\square$

Osservazione

Non è vero il viceversa, cioè in generale la continuità non implica la derivabilità.
Controesempio: la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$, ma abbiamo visto che non è derivabile in tale punto (infatti $x_0 = 0$ è un punto angoloso).

Le derivate permettono di calcolare i limiti che presentano le forme di indecisione $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (De l'Hopital)

Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno di x_0 (escluso, al più, in x_0), con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$ di tale intorno. Se

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *oppure* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$;
- *esiste il limite del rapporto delle derivate* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{12}$$

Con il teorema di De l'Hopital (DH) possiamo dimostrare le gerarchi di infiniti per $x \to \infty$.

Qualunque potenza $k > 0$ della funzione esponenziale di base $a > 1$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi funzione potenza con esponente $b > 0$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{kx}}{x^b} = +\infty$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{kx}}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{a^{\frac{kx}{b}}}{x}\right]^b = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{kx}{b}}}{x}\right]^b \overset{\text{DH}}{=} \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{k}{b} a^{\frac{kx}{b}}}{1}\right]^b = +\infty$$

$\square$

Qualsiasi funzione funzione potenza con esponente $b > 0$ è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza con esponente $c > 0$ della funzione logaritmica di base $e > 1$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\log x)^c} = +\infty$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\log x)^c} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^{\frac{b}{c}}}{\log x} \right]^c = \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{b}{c}}}{\log x} \right]^c \underset{=}{\text{DH}}$$

$$\underset{=}{\text{DH}} \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{c} x^{\frac{b}{c}-1}}{\frac{1}{x}} \right]^c = \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{c} x^{\frac{b}{c}-1} \cdot x \right]^c =$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{c} x^{\frac{b}{c}} \right]^c = +\infty$$

$\square$

Limiti notevoli

I limiti notevoli sono limiti di funzioni elementari che danno luogo a forme di indecisione e che vengono utilizzati spesso per la risoluzione di altri limiti.

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{DH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$\square$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{DH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

□

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \overset{\text{DH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Applicazioni delle derivate: calcolo dei limiti

Esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{DH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

□

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Osservazione

La forma di indecisione è 1^∞, quindi non si può applicare il teorema di De l'Hopital.

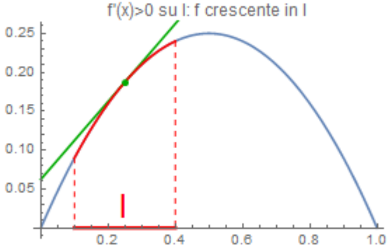
Applicazioni delle derivate: criterio di monotonia

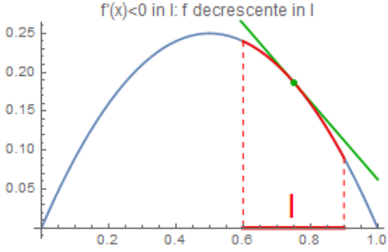
Poiché la derivata di una funzione f in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in tale punto x_0, lo studio del segno della derivata permette di determinare quando f è crescente e/o decrescente.

Teorema (Criterio di monotonia)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intervallo I.

- *La funzione f è* **crescente** *in I se e solo se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.*
- *La funzione f è* **decrescente** *in I se e solo se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.*





Applicazioni delle derivate: criterio di monotonia

Osservazione

Se $f'(x_0^-) < 0$ e $f'(x_0^+) > 0$ significa che $\forall x \in I_{x_0}$ si ha $f(x) > f(x_0)$, quindi x_0 è un punto di minimo locale.
Viceversa, se $f'(x_0^-) > 0$ e $f'(x_0^+) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale.

Esempio

Determiniamo gli intervalli di monotonia di $f(x) = x^2$.
La sua derivata è $f'(x) = 2x$. Studiamo il segno della derivata:

$$2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

Quindi, per il teorema sul criterio di monotonia, abbiamo

- f crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$;
- f decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Inoltre $x = 0$ è un punto di minimo assoluto.

Esempio

Determiniamo gli intervalli di monotonia di $f(x) = -3x^2$.
La sua derivata è $f'(x) = -3 \cdot 2x = -6x$. Studiamo il segno della derivata:

$$-6x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0$$

Quindi, per il teorema sul criterio di monotonia, abbiamo

- f decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$;
- f crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Inoltre $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.

Esempio

Determiniamo gli intervalli di monotonia di $f(x) = x^3$.
La sua derivata è $f'(x) = 3x^2$. Studiamo il segno della derivata:

$$3x^2 \geq 0 \quad \text{è sempre} > 0 \text{ e } 3x^2 = 0 \text{ se } x = 0$$

Quindi, per il teorema sul criterio di monotonia, f è sempre crescente.

Applicazioni delle derivate: ricerca dei massimi e dei minimi

Abbiamo già visto che lo studio della derivata di una funzione ci permette di determinare anche punti di massimo e minimo. In generale vale la seguente relazione.

Teorema (Fermat)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui f è derivabile. Se x_0 è un punto di massimo o minimo allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione.

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo. Allora, per h sufficientemente piccolo, abbiamo $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, quindi:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \qquad (\text{sia per } h > 0, \text{ sia per } h < 0)$$

Dividendo entrambi i membri per h abbiamo: □

Dimostrazione.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \text{se } h>0$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \text{se } h<0$$

Passando al limite, rispettivamente per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$, otteniamo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'_+(x_0) \leq 0$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'_-(x_0) \geq 0$$

Per ipotesi f è derivabile in x_0, quindi deve essere $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f(x_0)$. Dalle relazioni recedenti, poiché $f'_+(x_0) \leq 0$ e $f'_-(x_0) \geq 0$ l'unica possibilità è che $f'(x_0) = 0$. □

Attenzione

Non vale il viceversa, cioè se x_0 è un punto in cui la derivata si annulla non è detto che sia un massimo o un minimo.

Controesempio

La funzione $f(x) = x^3$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$, che si annulla in $x_0 = 0$, ma tale punto non è né un massimo né un minimo. È un flesso a tangente orizzontale.

Inoltre ci sono punti di massimo e minimo che non possono essere determinati utilizzando le derivate poiché f non è derivabile in tali punti.

Controesempio

La funzione $f(x) = |x|$ ha un minimo assoluto in $x = 0$, ma in tale punto la funzione non è derivabile, quindi non si può applicare il teorema di Fermat (manca un'ipotesi).

Attenzione

Quindi, riassumendo, analizzare i punti in cui la derivata si annulla non è sufficiente per determinare i massimi e i minimi di una funzione, poiché:

- ci sono punti in cui la derivata si annulla ma non sono massimi o minimi;
- ci sono punti di massimo o minimo in cui la derivata non esiste.

Applicazioni delle derivate: convessità, concavità e flessi

Oltre allo studio della monotonia, le derivate ci permettono di studiare la concavità delle funzioni e i punti di flesso.

Teorema

Sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo I.

- *La funzione f è* **convessa** *(o concava verso l'alto) in I se e solo se $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.*
- *La funzione f è* **concava** *(o concava verso il basso) in I se e solo se $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.*

Definizione (Punto di flesso)

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in (a, b)$ è detto **flesso** *quando esiste un suo intorno sinistro in cui f è concava (convessa) e un suo intorno destro in cui f è convessa (concava).*

Esempio

Sia $f(x) = x^3$. Allora:

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = (3x^2)' = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$$

Per determinare la concavità di f studiamo il segno della derivata seconda:

$$6x \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 0$$

Quindi

- f è convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$;
- f è concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Il punto $x = 0$ è un punto di flesso (a tangente orizzontale poiché la derivata prima si annulla in tale punto).

Diverse grandezze fisiche sono definite utilizzando le derivate.

Esempio

La velocità istantanea

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

Esempio

L'accelerazione istantanea

$$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} = v_i'(t) = s''(t)$$

Problemi di ottimizzazione

I problemi di ottimizzazione (o di ottimo) sono problemi in cui una grandezza viene espressa attraverso la variabile di una funzione e si chiede di massimizzare o minimizzare la funzione, cioè determinare per quali valori della variabile la grandezza assume valore massimo o minimo.

Modellizzazione nei problemi di ottimizzazione

1. Si sceglie la variabile tramite cui esprimere la grandezza;
2. si individua il dominio, cioè quali valori può assumere la variabile;
3. si determina la funzione, detta funzione obiettivo, che modellizza il problema;
4. si individuano il massimo o il minimo della funzione.

Esempio

Trovare il rettangolo di area massima fra tutti quelli aventi perimetro $P = 40$ m.

1. L'area di un rettangolo di base x e altezza y è data da $A = xy$. Il perimetro $P = 2(x + y) = 40$, quindi la base e l'altezza sono vincolate alla condizione $x + y = 20$. Scegliamo di esprimere il problema in funzione della variabile x, quindi $A = x(20 - x)$.
2. Trattandosi di una grandezza geometrica $x > 0$. Inoltre anche $y = 20 - x$ deve essere positiva, perciò $x < 20$. In definitiva $0 < x < 20$.
3. La funzione obiettivo è $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
4. $f'(x) = -2x + 20$, studiandone il segno osserviamo che

$$-2x + 20 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x < 10$$

L'area cresce $\forall x \in (0, 10)$, diminuisce $\forall x \in (10, 20)$. Quindi l'area $A(x)$ è massima quando il lato $x = 10$ (quindi quando il rettangolo è un quadrato).

Esempio: gestione delle scorte

Il problema della gestione delle scorte del magazzino di un'attività commerciale nasce dal fatto che, da una parte, è più economico avere poca merce (per diminuire i costi di magazzinaggio), dall'altra è necessario ordinare nuove merci, ma ciò richiede un costo c_0 per l'ordinazione e un costo c_1 per le spese di magazzino. Vogliamo minimizzare i costi.
Sia $Q = 10\,000$ kg il fabbisogno complessivo di merce e q la quantità da ordinare ogni volta. I costi delle ordinazioni sono dati dal prodotto tra i loro costi $c_0 = 20$ euro e il loro numero $\frac{Q}{q}$, mentre i costi del magazzino sono dati dal prodotto tra il costo $c_1 = 0,5$ euro per le spese di magazzino e la giacenza media $\frac{q}{2}$. La funzione obiettivo è quindi

$$C(q) = c_0 \cdot \frac{Q}{q} + c_1 \cdot \frac{q}{2} = 20 \cdot \frac{10000}{q} + 0,5 \cdot \frac{q}{2} =$$
$$= \frac{200000}{q} + \frac{q}{4} \qquad 0 < q < 10000$$

Esempio: gestione delle scorte

La derivata di $C(q)$ è

$$C'(q) = -\frac{200000}{q^2} + \frac{1}{4}$$

la quale ammette un minimo locale per $q = 400\sqrt{5}$.