Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Integrali

Sonia Cannas

A.A. 2019/2020

Introduzione al calcolo integrale

Problemi con l'operazione inversa della derivazione

Quando nei modelli dinamici si cerca l'andamento temporale di una grandezza variabile di cui è noto il tasso istantaneo di variazione si ricorre all'operazione inversa della derivazione.

Esempio

Supponiamo di conoscere la velocità $v(t)$ con cui si muove un oggetto e di voler determinare la legge oraria del moto $s = s(t)$. Poiché

$$v(t) = s'(t)$$

dobbiamo determinare una funzione $s(t)$ la cui derivata sia $v(t)$.

Problema

In generale, data una funzione f, esiste ed è possibile determinare una funzione la cui derivata sia f?

Definizione (Primitiva)

Una funzione F si dice **primitiva** *di una funzione f in un intervallo I se è derivabile in I e se la la sua derivata coincide con f per ogni $x \in I$, cioè*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I \tag{1}$$

Esempio

La funzione $F(x) = x^3$ è una primitiva di $f(x) = 3x^2$ in $I = \mathbb{R}$. Infatti $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Esempio

La funzione $F(x) = \log(x)$ è una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $I = (0, +\infty)$. Infatti $F'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$.

Osservazione

La primitiva di una funzione non è unica. Le primitive sono infinite.

Esempio

La funzione $F(x) = x^3$ è una primitiva di $f(x) = 3x^2$, ma sono primitive di f anche $G(x) = x^3 + 1$, $H(x) = x^3 + 2$, $\dots$, poiché la derivata di una costante è nulla. In generale tutte le funzioni della forma $x^3 + c$, con $c \in \mathbb{R}$, sono primitive di f. Le primitive sono quindi infinite.

L'integrale indefinito

L'operazione che associa ad ogni funzione derivabile la sua derivata si chiama *derivazione*. Il procedimento inverso, che consiste nel determinare, se esistono, tutte le infinite primitive di una data funzione si chiama *integrazione*.

Definizione (Integrale indefinito)

Si definisce **integrale indefinito** *di una funzione f l'insieme di tutte le primitive di f e si indica con*

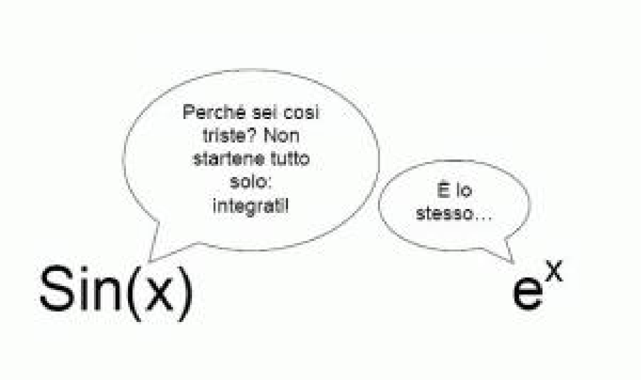
$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int e^x dx = e^x + c$$



$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$$

Esempio

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Esempio

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Esempio

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Linearità dell'integrale

Gli integrali godono delle seguenti importanti proprietà:

$$\int k \cdot f(x) = k \int f(x)dx \tag{3}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{4}$$

Esempio

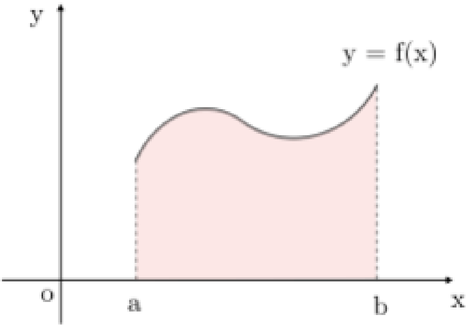
$$\int \left(4x^2 - \frac{5}{x} + 7e^x\right) dx = 4 \int x^2 dx - 5 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int e^x dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \log |x| + 7e^x + c$$

Integrale definito

Problema

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. È possibile determinare l'area della regione delimitata dal grafico di f e dall'asse x?



Integrale definito

Area sottesa da una retta orizzontale

Se la funzione è una retta orizzontale $y = k$ il problema è facilmente risolvibile: bisognerebbe calcolare l'area di un rettangolo di base $b - a$ e di altezza k, quindi

$$A = (b - a) \cdot k$$

Strategia generale

Se la funzione è più complessa, in particolare se non ha tratti rettilinei, non è possibile sfruttare il calcolo dell'area di una figura geometrica nota. Possiamo però suddividere e approssimare l'area sottesa dalla funzione f con figure geometriche di cui è semplice calcolare l'area, ad esempio con rettangoli.

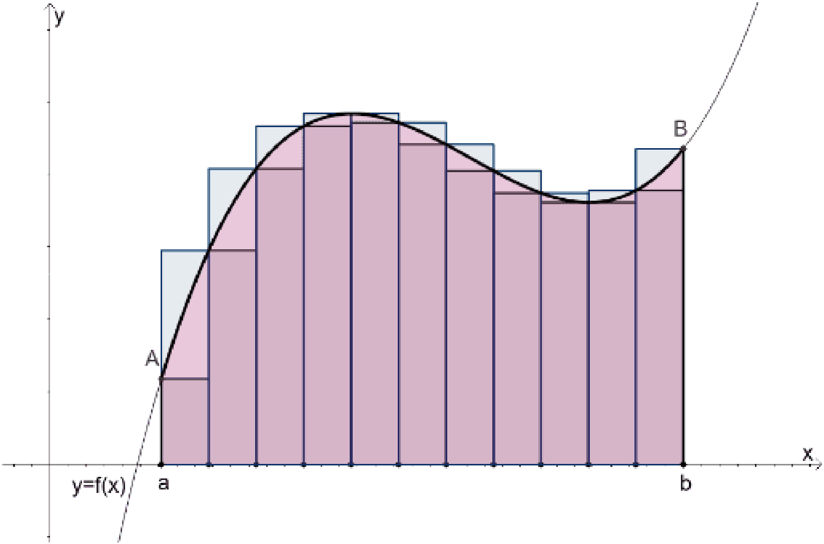
Integrale definito

Costruzione dell'integrale definito

1. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in più intervalli mediante i punti di suddivisione x_i t.c. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$;
2. in ciascun intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo due rettangoli di base $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, uno di altezza L_i che approssima l'area sottesa da f in $[x_{i-1}, x_i]$ per eccesso, l'altro di altezza l_i che approssima l'area sottesa da f per difetto;
3. le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da f per eccesso saranno date da $L_i \cdot \Delta x_i$, quelle dei rettangoli che approssimano f per difetto da $l_i \cdot \Delta x_i$;
4. definiamo **somma superiore** e **somma inferiore** le aree ottenute sommando le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da f per eccesso e per difetto rispettivamente, cioè

$$S = \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot \Delta x_i \qquad s = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i$$

Integrale definito



Integrale definito

Costruzione dell'integrale definito

È possibile dimostrare che, per ogni suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ nei punti x_i,la somma inferiore è sempre minore della somma superiore, cioè

$$s \leq S$$

Al variare della suddivisione di $[a, b]$ variano anche S e s, ma vale sempre la relazione di disuguaglianza di sopra. In particolare, fra tutte le somme inferiori consideriamo quella maggiore di tutte, cioè sup s. Similmente, fra tutte le possibile somme superiori consideriamo quella minore, cioè inf S. Poiché la disuguaglianza di sopra vale per qualsiasi suddivisione, allora

$$\sup s \leq \inf S$$

Integrale definito

Definizione (Integrale definito)

Si definisce **integrale definito** *di una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *il numero* $sup\ s = inf\ S$ *e si denota con*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Significato geometrico dell'integrale definito

L'integrale definito è un numero che rappresenta l'area delimitata da una funzione f e dall'asse x in un intervallo $[a, b]$.

Integrale definito

Per il calcolo degli integrali definiti si può sfruttare il seguente teorema.

Teorema (Fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* $F(x)$ *una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{5}$$

Esempio

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Integrale definito

Esempio

$$\int_1^2 3e^x dx = 3\int_1^2 e^x dx = 3\left[e^x\right]_1^2 = 3[e^2 - e^1] = 3e^2 - 3e$$

Esempio

$$\begin{aligned}\int_3^4 \left(\frac{7}{x+1} + 4x^3\right) dx &= \left[7\log|x+1| + x^4\right]_3^4 = \\ &= 7\log|4+1| + 4^4 - \left(7\log|3+1| + 3^4\right) = \\ &= 7\log(5) + 256 - 7\log(4) - 81 = \\ &= \log(5^7) - \log(4^7) + 175 = \\ &= \log\left(\frac{5^7}{4^7}\right) + 175 = \\ &= \log\left(\frac{5}{4}\right)^7 + 175 \simeq 176,562\end{aligned}$$