Coniche:
la parabola

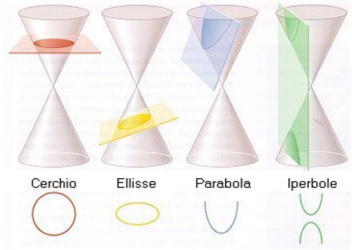
Liceo Classico "Siotto

A.S. 2019/2020

Coniche

Consideriamo un doppio cono costituito da due coni circolari retti coassiali (cioè aventi lo stesso asse) aventi il vertice in comune. Prendiamo ora un piano e intersechiamolo col cono. A seconda dell'inclinazione del piano si possono ottenere le seguenti coniche (non degeneri):

- la *circonferenza*, ottenuta dall'intersezione del cono con un piano perpendicolare al suo asse;
- l'*ellisse*, ottenuto intrsecando il cono con un piano inclinato di un certo angolo inferiore all'inclinazione del lato del cono;
- la *parabola*, ottenuta intersecando il cono con un piano parallelo a un lato del cono;
- l'*iperbole*, ottenuta intersecando il cono con un piano parallelo al suo asse.



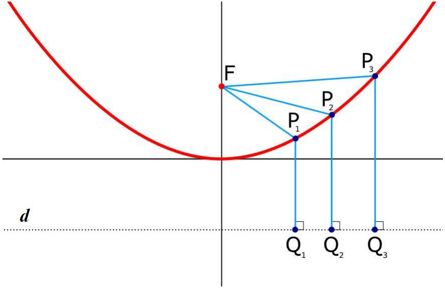
Parabola: definizione come luogo di punti

Definizione (Parabola)

La parabola è il luogo dei punti P equidistanti da una retta d, detta direttrice, e da un punto F, detto fuoco. Cioè è il luogo dei punti P tali che:

$$d(P, F) = d(P, d) \tag{1}$$

Quindi la parabola è l'insieme dei punti P tali che, indicata con Q la proiezione ortogonale di P sulla retta d, sono uguali tra loro le lunghezze dei segmenti $\overline{PF} = \overline{PQ}$



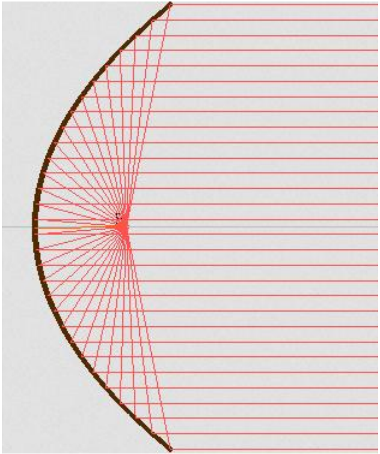
Parabola: definizione come luogo di punti

Osservazione

- La parabola ha un *asse di simmetria*: è la retta passante per F perpendicolare alla direttrice d; se un punto appartiene alla parabola allora vi appartiene anche il suo simmetrico P'.
- La parabola ha un *vertice*: è il punto medio fra il fuoco e la direttrice.

Parabola: proprietà focale

La parabola ha una caratteristica molto importante: se nel fuoco è posta una sorgente luminosa e la "parete" interna della parabola è rivestita di materiale riflettente, ogni raggio luminoso che parte dal fuoco si riflette in un raggio perpendicolare alla direttrice. Tale proprietà è nota come *proprietà focale*.



Parabola: proprietà focale

Applicazioni della proprietà focale

- Una leggenda narra che Archimede (287-212 a.C. circa) per proteggere la città di Siracusa dall'assedio della flotta romana fece installare in prossimità del porto grandi specchi di forma parabolica (detti specchi ustori) che, opportunamente orientati verso le navi romane, le fecero incendiare.
- Un'importante applicazione delle proprietà delle superfici paraboliche è quella relativa alla costruzione di antenne che funzionano da amplificatori di segnali provenienti da satelliti o dallo spazio.
- Oggi il metodo di concentrazione dei raggi solari viene utilizzato in alcune centrali solari per la produzione di energia elettrica. Un esempio di applicazione è la centrale sperimentale Archimede nei pressi di Siracusa.
- Grazie alla proprietà focale la parabola può riflettere i raggi luminosi e dar luogo ad illusioni come questa.

Parabola: equazione

Per ricavare l'equazione della parabola partiamo dalla sua definizione come luogo di punti, cioè $d(P, F) = d(P, Q)$, dove P è un generico punto della parabola e Q la proiezione di P sulla direttrice.

Consideriamo il caso particolare di una parabola con la direttrice d di equazione $y = -f$, $f > 0$, e tale per cui il punto medio tra il fuoco F e la direttrice d (cioè il vertice della parabola) sia l'origine $O = (0, 0)$ del sistema di riferimento.
Quindi $F = (0, f)$. Sia $P = (x, y)$ un generico punto della parabola.
Per ricavare l'equazione utilizziamo la definizione di parabola come luogo dei punti P tali per cui $\overline{PF} = \overline{PQ}$, dove Q è la proiezione ortogonale di P sulla retta d, quindi $Q = (x, -f)$.

Parabola: equazione

$$d(P,F) = d(P,Q) \qquad \text{(utilizzando la formula della distanza tra due punti)}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-f)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+f)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2fy + f^2} = \sqrt{y^2 + 2fy + f^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2fy + f^2 = y^2 + 2fy + f^2$$

$$x^2 - 2fy = 2fy$$

$$x^2 = 4fy$$

$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

Ponendo $\frac{1}{4f} = a$ si ottiene l'equazione della parabola cercata:

$$y = ax^2 \tag{2}$$

Parabola: equazione

Poiché $a = \dfrac{1}{4f}$ allora

$$4f = \frac{1}{a} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{a}$$

Quindi le coordinate del fuoco sono

$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right) \tag{3}$$

Inoltre, l'equazione della direttrice d è

$$d : y = -\frac{1}{4a} \tag{4}$$

Parabola: equazione

Osservazione

Tale parabola ha l'asse delle ordinate come suo asse di simmetria. Possono verificarsi due casi:

- F è "al di sopra" di d $\Rightarrow$ la parabola ha concavità verso l'alto $\Rightarrow$ $a > 0$;
- F è "al di sotto" di d $\Rightarrow$ la parabola ha concavità verso il basso $\Rightarrow$ $a < 0$;

Parabola: equazione

Nel ricavare l'equazione della parabola abbiamo considerato una parabola particolare (asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine).
Per ricavare l'equazione di una generica parabola con l'asse parallelo all'asse y basta traslare il vertice $V = (0,0)$ della parabola già studiata in un vertice generico $V' = (x_v, y_v)$. Dopo la traslazione si ottiene l'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse y:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{5}$$

Anche se è meno comune, una parabola può avere l'asse parallelo all'asse x (anziché l'asse y), in tal caso per ottenere l'equazione generica basta scambiare le variabili x e y nella 5:

$$x = ay^2 + by + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{6}$$