# Disequazioni di I grado intere

Liceo Classico "Siotto

A.S. 2019/2020

# Disuguaglianze

Una disequazione è un particolare tipo di disuguaglianza. Le **disuguaglianze** sono scritture fra due espressioni numeriche tra le quali è posto uno dei seguenti simboli:

| | |
|---|---|
| $<$ | (minore) |
| $\leq$ | (minore o uguale) |
| $>$ | (maggiore) |
| $\geq$ | (maggiore o uguale) |

**Esempio**

Sono esempi di disuguaglianze:

$$3 < 8 \qquad -12 \leq 0 \qquad 4 + 13 > 10 \qquad -2 + 3 \geq -6$$

Così come per le equazioni, l'epressione a sinistra è detta *primo membro*, quella a destra *secondo membro*.

# Definizione disequazione

**Definizione (Disequazione)**

*Si definisce* **disequazione** *ogni disuguaglianza che contiene una o più lettere, dette incognite, di cui si cercano, se esistono, i valori che rendono vera la disuguaglianza.*

**Esempio**

Sono esempi di disequazioni:

$$3x < 2 + x \qquad -2(x^2 + 6) \geq \frac{1}{2}x + 9$$

$$\frac{x+2}{1-x} > \frac{1}{x} \qquad (x-3)(x+1) \leq \frac{x^2 + 7x}{2x - 8}$$

Trovare le soluzioni di una disequazione significa trovare quei valori che, sostituiti alla incognita (o alle incognite) rendono la disuguaglianza vera.

# Come risolvere le disequazioni: I principio di equivalenza

Come per le equzioni, per trovare le soluzioni di una disequazione si trasforma la disequazione data in una equivalente, cioè in una disequazione avente le stesse soluzioni. Per farlo si utilizzano due principi di equivalenza.

**Primo principio di equivalenza per le disequazioni**

Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disequazione un numero reale o un'espressione algebrica (definita per tutti i valori delle variabili che vi compaiono), si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Il primo principio è del tutto analogo a quello delle equazioni ed è conseguenza del fatto che, partendo da una disuguaglianza vera, aggiungendo o sottraendo uno stesso numero ad entrambi i membri di una disuguaglianza, si ottiene un disuguaglianza ancora vera.

# Come risolvere le disequazioni: I principio di equivalenza

## Esercizio 1 sul I principio di equivalenza

Risolviamo la disequazione $x - 2 > 4$.

$$\begin{aligned}
&x - 2 > 4 \\
&x - 2 + 2 > 4 + 2 \\
&x - \cancel{2} + \cancel{2} > 6 \\
&x > 6
\end{aligned}$$

Le soluzioni sono tutti i numeri $x > 6$.

## Osservazione

Se nell'esempio precedente abbiamo fatto i calcoli corretti, prendendo qualsiasi numero maggiore di 6 otterremo una disuguaglianza vera. Verifichiamolo prendendo, ad esempio, il numero $x = 10$:

$$\begin{aligned}
&x - 2 > 4 \\
&10 - 2 > 4 \\
&8 > 4 \qquad \text{(vero, poiché 8 è più grande di 4)}
\end{aligned}$$

# Come risolvere le disequazioni: I principio di equivalenza

## Osservazione

Come per le equazioni, osserviamo che applicare il primo principio di equivalenza delle disequazioni equivale a spostare un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno. La disequazione precedente poteva essere anche risolta, più velocemente, in questo modo:

$$x - 2 > 4$$
$$x > 4 + 2$$
$$x > 6$$

## Esercizio 2 sul primo principio di equivalenza

Risolviamo la disequazione $4x + 7 > -2 - 3x$.

$$4x + 7 < -2 + 3x$$
$$4x - 3x < -2 - 7$$
$$x < -9$$

L'insieme delle soluzione è l'insieme di tutti i numeri $x > 6$.

# Come risolvere le disequazioni: Il principio di equivalenza

## Secondo principio di equivalenza per le disequazioni

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale diverso da zero, si ottiene una disequazione equivalente a quella data a condizione di:

- mantenere lo stesso verso se il numero è positivo;
- invertire il verso se il numero è negativo

## Esercizio 1 sul II principio di equivalenza

Risolviamo la disequazione $3x \leq 6$.

$$3x \leq 6$$
$$\frac{3x}{3} \leq \frac{6}{3}$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \leq \frac{\cancelto{2}{6}}{\cancelto{1}{3}}$$
$$x \leq 2$$

L'insieme delle soluzione è l'insieme di tutti i numeri $x \leq 2$.

# Come risolvere le disequazioni: Il principio di equivalenza

## Esercizio 2 sul II principio di equivalenza

Risolviamo la disequazione $-4x \leq 7$.

$$
\begin{aligned}
& -4x \leq 7 \\
& \frac{-4x}{-4} \geq \frac{7}{-4} \\
& \frac{\cancel{-4}x}{\cancel{-4}} \geq -\frac{7}{4} \\
& x \geq -\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

L'insieme delle soluzione è l'insieme di tutti i numeri $x \geq -\frac{7}{4}$.

# Come risolvere le disequazioni: Il principio di equivalenza

### Perché invertire il verso della disuguaglianza quando si moltiplica/divide per un numero negativo?

Il secondo principio è simile a quello delle equazioni, ma distingue due casi a seconda che il numero per il quale si moltiplica o divide ambo i membri sia positivo o negativo. Ciò è dovuto dalla proprietà delle disuguaglianze secondo cui, moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disuguaglianza vera per uno stesso numero, se il numero è negativo si ottiene una disuguaglianza falsa. Per ottenerla vera bisogna invertire il segno della disuguaglianza.

### Esempio

Consideriamo la disuguaglianza $4 < 7$. È una disugualianza vera.
Supponiamo di moltiplicare ambo i membri per $-2$. Se lasciassimo inalterato il verso della disuguaglianza otterremmo $-8 < -14$, che è una disuguaglianza falsa.
Per renderla vera basta invertire il verso della disuguaglianza: $-8 > -14$.

# Disequazioni impossibili

Come per le equazioni, quando non esistono soluzioni che soddisfono la disequazione, parliamo di **disequazione impossibile**.

## Esercizio

$$2x - 7 < 4x - 2(x + 8) \qquad \text{(Applichiamo la proprietà distributiva)}$$
$$2x - 7 < 4x - 2x - 16 \qquad \text{(Applichiamo il primo principio)}$$
$$2x - 4x + 2x < -16 + 7 \qquad \text{(Sommiamo i termini simili)}$$
$$0x < -9$$

Qualsiasi sia il numero che sostituisco alla $x$, la disequazione si trasforma nella disuguaglianza $0 < -9$, che è falsa. Perciò la disequazione è impossibile.

# Disequazioni sempre verificata

Può capitare che, qualsiasi sia il valore numerico che sostituiamo all'incognita $x$, la disequazione sia sempre verificata

### Esercizio

$$x^2 - (x+1)^2 + 4x < 2(3+x) \qquad \text{(Svolgiamo i calcoli)}$$

$$x^2 - (x^2 + 2x + 1) + 4x < 6 + 2x$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x - 1 + 4x < 6 + 2x \qquad \text{(Applicando il primo principio)}$$

$$-2x + 4x - 2x < 6 + 1 \qquad \text{(Sommiamo i termini simili)} \qquad 0x < 7$$

Qualsiasi sia il numero che sostituisco alla $x$, la disequazione si trasforma nella disuguaglianza $0 < 7$, che è sempre vera. Perciò la disequazione è sempre verificata e si scrive $\forall x \in \mathbb{R}$ (si legge "per ogni $x$ appartenente all'insieme dei numeri reali").

### Esercizio 1

$3(x-1) > 5x+2$ (Applichiamo la proprietà distributiva al primo membro)

$3x-3 > 5x+2$ (Applichiamo il primo principio)

$3x-5x > 2+3$ (Sommiamo i termini simili)

$-2x > 5$ (Applichiamo il secondo principio, ricordando di cambiare il segno)

$$\frac{\cancel{-2}}{\cancel{-2}}x < \frac{5}{-2}$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

Qualunque numero reale minore di $-\frac{5}{2}$ soddisfa la disequazione data, quindi l'insieme delle soluzioni è l'insieme dei numeri $x < -\dfrac{5}{2}$.

### Esercizio 2

$(x-1)(x+1) > (x+1)^2 - 2(x-2)$ (Svolgiamo i calcoli)

$x^2 - 1 > x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} + 4$ (Applichiamo il primo principio)

$x^2 - x^2 > 1 + 4 + 1$

$0 > 6$

Otteniamo una disuguaglianza falsa, quindi non esiste alcun numero che soddisfa la disequazione di partenza, quindi la disequazione è impossibile.

Come per le equazioni, se i coefficienti della disequazione non sono interi, ci si può ricondurre facilmente ad una disequazione a coefficienti interi moltiplicando ambo i membri per il m.c.m. dei denominatori.

**Esercizio 3**

$$\frac{3x+1}{3} - 2 < \frac{2x-3}{2} \qquad \text{(Poiché il m.c.m. dei denominatori è 6)}$$

$$\frac{2(3x+1)-12}{6} < \frac{3(2x-3)}{6} \qquad \text{(Applichiamo il secondo principio)}$$

$$6x + 2 - 12 < 6x - 9 \qquad \text{(Applichiamo il primo principio)}$$

$$6x - 6x < -9 + 10$$

$$0 < 1$$

Otteniamo una disuguaglianza vera, quindi la disequazione è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.