



Università di Cagliari  
Corso di Laurea in Farmacia

# MATEMATICA LIMITI

Sonia Cannas

A.A. 2020/2021

## Definizione (Retta ampliata)

Si definisce **retta reale ampliata** (o **estesa**)

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

## Definizione (Intorno)

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si definisce **intorno** di  $x_0$  di ampiezza  $\epsilon$  l'insieme dei numeri reali  $x$  che distano meno di  $\epsilon$  da  $x_0$ , cioè

$$I_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \epsilon\}$$

## Osservazione

L'intorno di  $x_0$  di ampiezza  $\epsilon$  è l'insieme dei punti dell'intervallo

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

Infatti  $I_\epsilon(x_0)$  è l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \epsilon &\Leftrightarrow -\epsilon < x - x_0 < \epsilon \\ &-\epsilon + x_0 < x < \epsilon + x_0 \\ &x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \end{aligned}$$

# Intorni di un numero reale

Per ogni intorno  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  possiamo distinguere

- l'intorno destro  $[x_0, x_0 + \epsilon)$ ;
- l'intorno sinistro  $(x_0 - \epsilon, x_0]$ .

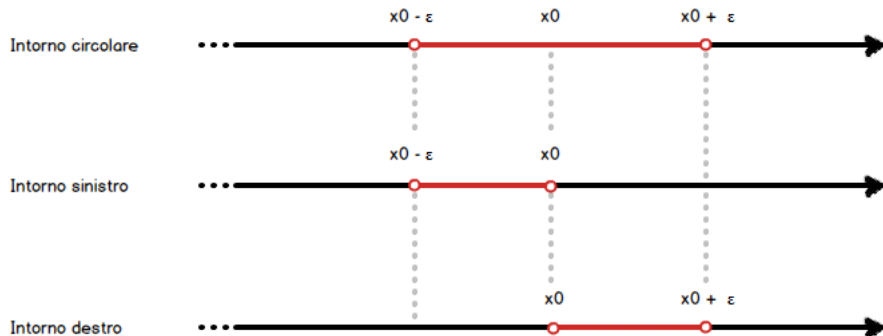


Figura: Intorno di  $x_0$  di raggio  $\epsilon$

## Definizione (Punto interno)

Un punto  $x$  si dice **interno** ad  $A \subseteq \mathbb{R}$  se:

- $x \in A$ ;
- esiste un suo intorno  $I_\epsilon(x) \subset A$ .

## Esempio

Consideriamo  $A = [-1, 3)$ . Il punto  $x = 2$  è interno ad  $A$  poiché appartiene ad  $A$  ed esiste un suo intorno contenuto in  $A$ , ad esempio  $I_{\frac{1}{2}}(2) \subset [1, 3)$ .

## Definizione (Punto esterno)

Un punto  $x$  si dice **esterno** ad  $A \subseteq \mathbb{R}$  se:

- $x \notin A$ ;
- esiste un suo intorno  $I_\epsilon(x) \subset \bar{A}$  (o, equivalentemente, tale che  $I_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$ ).

## Esempio

Consideriamo  $A = [-1, 3)$ . Il punto  $x = 4$  è esterno ad  $A$  poiché non appartiene ad  $A$  ed esiste un suo intorno contenuto nel complementare  $\bar{A}$ , ad esempio  $I_{\frac{1}{3}}(4) \subset (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ .

## Definizione (Punto di frontiera)

Un punto  $x$  si dice **di frontiera** per  $A \subseteq \mathbb{R}$  se non è né interno né esterno, cioè se ogni suo intorno contiene almeno un punto di  $A$  e almeno un punto del complementare  $\bar{A}$ .

## Esempio

Consideriamo  $A = [-1, 3)$ . I punti  $x = -1$  e  $x = 3$  sono di frontiera per  $A$ , infatti qualsiasi sia l'ampiezza  $\epsilon$  dei loro intorni  $I_\epsilon(-1)$  e  $I_\epsilon(3)$  entrambi contengono sia punti di  $A$  che del complementare  $\bar{A}$ .

## Definizione (Punto di accumulazione)

Un punto  $x \in \mathbb{R}^*$  è **di accumulazione** per l'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  se ogni suo intorno contiene almeno un punto di  $A$  distinto da  $x$ .

## Osservazione

I punti di accumulazione di un intervallo  $A \subseteq \mathbb{R}$  sono i punti interni e di frontiera di  $A$ .

## Esempio

Consideriamo  $A = [-1, 3)$ . Sono punti di accumulazione  $-1, 3, 0, 2, -\frac{1}{3}, \dots$ . I punti di accumulazione sono tutti quelli che appartengono all'intervallo  $[-1, 3]$ .



# Definizione informale di limite

## A cosa servono i limiti?

Lo scopo della nozione di **limite** è descrivere rigorosamente il comportamento di una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  “vicino” ad un punto di accumulazione del suo dominio  $A$ .

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $A$ . Possiamo “far tendere”  $x$  a  $x_0$  (in simboli  $x \rightarrow x_0$ ) e studiare cosa succede alle immagini  $f(x)$ .

## Definizione informale di limite

Consideriamo una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e siano  $x_0, L \in \mathbb{R}^*$ . Diremo che il limite della funzione  $f$  è uguale a  $L$ , per  $x$  che tende a  $x_0$ , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se i valori assunti da  $f$  sono vicini quanto si vuole a  $L$  in corrispondenza di tutti i punti  $x$  sufficientemente vicini a  $x_0$ .

## Esempio

Consideriamo la funzione elementare  $f(x) = e^x$ .

Ricordiamo che il dominio  $D = (-\infty, +\infty)$ .

Osserviamo che

- quando  $x$  assume valori via via più piccoli (tendenti a  $-\infty$ ) la funzione si avvicina sempre più alla quota  $y = 0$ , rimanendone sempre al di sopra, senza mai raggiungerla. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

- quando  $x$  assume valori via via più grandi (tendenti a  $+\infty$ ) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a  $+\infty$ . Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

## Esempio

Consideriamo la funzione elementare  $f(x) = \log(x)$ .

Ricordiamo che il dominio  $D = (0, +\infty)$ .

Osserviamo che

- quando  $x$  si avvicina a 0 da destra (tende a  $0^+$ ) le ordinate sono negative e diventano sempre più grandi in valore assoluto, ovvero tendono a  $-\infty$ . Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$$

- quando  $x$  assume valori via via più grandi (tendenti a  $+\infty$ ) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a  $+\infty$ . Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

## Osservazione

Il punto  $x_0$  è di accumulazione, quindi può anche non appartenere al dominio, perciò  $f(x_0)$  può non essere definito.

Anche se  $f(x_0)$  è definito può essere diverso dal limite  $L$ .

## Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Per  $x = 0$  abbiamo  $f(0) = 0$ . Ma  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

Nel caso in cui  $x_0$  e  $L$  siano finiti possiamo descrivere i loro intorno come intervalli di ampiezza  $\delta$  e  $\epsilon$  rispettivamente.

## Definizione (Limite (con $\epsilon$ e $\delta$ ))

Consideriamo una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $A$  e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Diremo che il limite di  $f$ , per  $x \rightarrow x_0$ , è uguale a  $L$ , e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se per ogni ampiezza  $\epsilon > 0$  esiste un'ampiezza  $\delta > 0$  tale che se  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  allora  $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ .

# Definizione di limite

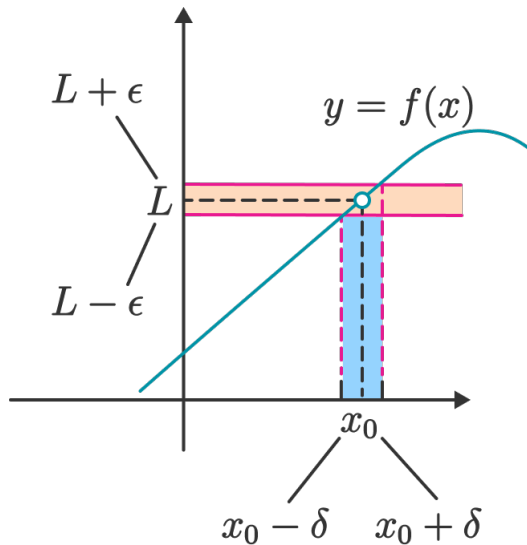


Figura: Definizione di limite con  $\epsilon$  e  $\delta$

## Definizione (Asintoto verticale)

Sia  $x_0$  un punto di accumulazione per il dominio di una funzione  $f$ . Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

il grafico della funzione ha un **asintoto verticale** di equazione  $x = x_0$ .

## Esempio

Il grafico della funzione  $f(x) = \log(x)$  ha un asintoto verticale di equazione  $x = 0$  poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

## Definizione (Asintoto orizzontale)

Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $+\infty$  (o  $-\infty$ ). Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

il grafico della funzione ammette un **asintoto orizzontale** di equazione  $y = L$ .

## Esempio

Il grafico della funzione  $f(x) = e^x$  ammette un asintoto orizzontale di equazione  $y = 0$  poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



## Teorema

Siano  $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1)$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è  $+\infty$  e l'altro  $-\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (2)$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è  $\infty$  e l'altro 0)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (3)$$

(l'uguaglianza perde significato se i due limiti al secondo membro sono entrambi infiniti o nulli)

# Calcolo dei limiti: forme di indeterminazione

Per il teorema sulle operazioni con i limiti abbiamo visto che se la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite, per  $x \rightarrow x_0$  o per  $x \rightarrow \pm\infty$ , è elementare o è somma/prodotto/quotiente di funzioni elementari, il limite si calcola con una semplice sostituzione.

Il calcolo dei limiti può portare alle seguenti 7 **forme di indeterminazione** o **indecisione**:

①  $+\infty - \infty$  ( $0 - \infty + \infty$ );

②  $0 \cdot \infty$ ;

③  $\frac{\infty}{\infty}$ ;

④  $\frac{0}{0}$ ;

⑤  $1^\infty$ ;

⑥  $0^0$ ;

⑦  $\infty^0$ .

# Calcolo dei limiti: forme di indeterminazione

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x) = \infty - \infty = ?$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = -\infty \cdot 0 = ?$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 - x^2} = \frac{+\infty}{-\infty} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1} = \frac{0}{0} = ?$$



## Attenzione

La forma di indeterminazione  $\frac{0}{0}$  indica un limite in cui numeratore e denominatore **tendono** a 0, non che essi assumono il valore 0. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^0 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{x - 1}$$

non è una forma indeterminata, poiché

$$\frac{0}{x - 1} = 0$$

prima ancora di calcolarne il limite.

## Attenzione

Analogamente, la forma di indeterminazione  $1^\infty$  indica il limite di una potenza la cui base **tende** a 1 e l'esponente ad infinito. Quindi è una forma di indeterminazione del tipo  $1^\infty$  il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ma non lo è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x$$

poiché

$$1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

# Calcolo dei limiti: funzioni polinomiali

Sia

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \dots, n\}, a_n \neq 0.$$

Possiamo calcolare il seguente limite raccogliendo  $a_n x^n$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

## Esempio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \left( 1 - \frac{4x}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \left( 1 - \frac{4}{3x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \end{aligned}$$

Per calcolare il  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$  basta calcolare il limite del termine di grado massimo.

# Ordini di infinito

Le funzioni  $f(x) = 3x^2$  e  $g(x) = 4x$  sono entrambe *infinite*.

## Definizione (Funzione infinita)

Una funzione  $f$  si dice **infinita** per  $x \rightarrow x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Le funzioni infinite possono essere infiniti di ordine diverso.

## Definizione

Sia  $g$  una funzione infinita per  $x \rightarrow x_0$ . Una funzione  $f$  è un infinito di ordine  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) quando esiste il seguente limite finito e diverso da 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

La funzione  $g$  svolge il ruolo di infinito campione, intuitivamente si può pensare come una sorta di “unità di misura” rispetto alla quale si valuta la velocità con cui tende all’infinito la funzione  $f$ .

## Esempio

Calcoliamo l'ordine di infinito di  $f(x) = x^3$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Come infinito campione scegliamo  $g(x) = x$ . Dobbiamo determinare  $a \in \mathbb{R}$  in modo tale che il seguente limite sia finito e diverso da zero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^a}$$

Ciò accade se e solo se  $a = 3$ , quindi  $f(x) = x^3$  è un infinito di ordine 3 per  $x \rightarrow +\infty$  rispetto a  $g(x) = x$ .

## Ordine di infinito delle funzioni polinomiali

Per le funzioni polinomiali, se si assume  $g(x) = x$  come infinito campione, l'ordine di infinito per  $x \rightarrow +\infty$  è dato dal grado del polinomio.



## Definizione

*Siano  $f$  e  $g$  due funzioni infinite per  $x \rightarrow \infty$ . Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*Se tale limite è uguale a*

- $0$  diremo che  $f$  è infinito di ordine inferiore rispetto a  $g$ ;
- $k \neq 0$  diremo che  $f$  e  $g$  sono infiniti dello stesso ordine;
- $\infty$  diremo che  $f$  è un infinito di ordine superiore rispetto a  $g$ ;
- $\nexists$ , in tal caso i due infiniti non sono confrontabili.

# Calcolo dei limiti: funzioni razionali fratte

Siano  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  e

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  due polinomi.

Nel calcolo dei limiti di queste funzioni possiamo trovare due forme di indeterminazione.

$\frac{\infty}{\infty}$  nel calcolo di limiti per  $x \rightarrow \infty$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 \left(1 - \frac{1}{2x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{x^8 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{x^8 \left(1 + \frac{1}{x^8}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^8} = 0$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2}{3 - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^4}\right)}{-2x^4 \left(\frac{3}{-2x^4} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{-2x^4} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$  nel calcolo di limiti per  $x \rightarrow x_0$

Se si verifica la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  significa che  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ , quindi entrambi i polinomi sono divisibili per  $(x - x_0)$ . L'indeterminazione si può rimuovere scomponendo i due polinomi in fattori e semplificando la frazione.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

## Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$  con  $F$  infinito di ordine superiore rispetto a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ;
- $y = g(x) + G(x)$  con  $G$  infinito di ordine superiore rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

## Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad (\text{forma indeterminata})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 + \frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^4 \left( 1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^4 \left( 1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} \end{aligned}$$

La funzione esponenziale di base  $a > 1$  è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi funzione potenza con esponente  $b > 0$ , cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2018x^{100}} = +\infty$$

Qualsiasi funzione potenza con esponente  $b > 0$  è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza con esponente  $c > 0$  della funzione logaritmica di base  $a > 1$ , cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(\log_a x)^c} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{589 \log^{100}(x)} = +\infty$$

## Definizione (Funzione infinitesima)

Una funzione  $f$  si dice **infinitesima** per  $x \rightarrow x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Come per le funzioni infinite, esistono infinitesimi di diverso ordine.

## Definizione

Sia  $g$  una funzione infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ . Una funzione  $f$  è un infinitesimo di ordine  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) quando esiste il seguente limite finito e diverso da 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

La funzione  $g$  svolge il ruolo di infinitesimo campione.



## Esempio

Calcoliamo l'ordine di infinitesimo di  $f(x) = x^3$  per  $x \rightarrow 0$ .

Come infinitesimo campione scegliamo  $g(x) = x$ . Dobbiamo determinare  $a \in \mathbb{R}$  in modo tale che il seguente limite sia finito e diverso da zero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^a}$$

Ciò accade se e solo se  $a = 3$ , quindi  $f(x) = x^3$  è un infinitesimo di ordine 3 per  $x \rightarrow 0$  rispetto a  $g(x) = x$ .

## Ordine di infinitesimo delle funzioni polinomiali

Per le funzioni polinomiali, se si assume  $g(x) = x$  come infinitesimo campione, l'ordine di infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  è dato dal termine di grado minimo.

## Definizione

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ . Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tale limite è uguale a

- 0 diremo che  $f$  è infinitesima di ordine superiore rispetto a  $g$ ;
- $k \neq 0$  diremo che  $f$  e  $g$  sono infinitesime dello stesso ordine;
- $\infty$  diremo che  $f$  è infinitesima di ordine inferiore rispetto a  $g$ ;
- $\nexists$ , in tal caso i due infinitesimi non sono confrontabili.

## Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$  con  $F$  infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ;
- $y = g(x) + G(x)$  con  $G$  infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

## Teorema

*Il grafico di una funzione  $f$  ammette la retta  $y = mx + q$  quale asintoto obliquo se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$

3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

## Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{x + 2} = -1 \end{aligned}$$

Quindi la funzione  $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$  per  $x \rightarrow +\infty$  possiede come asintoto obliquo la retta  $y = x - 1$ .

## Esempio

La funzione  $y = \log(x)$  non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

## Esempio

La funzione  $y = e^x$  non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

## Definizione (Funzione continua)

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in A \cap A'$  (cioè  $x_0$  è un punto di accumulazione che appartiene al dominio  $A$ ). Diremo che  $f$  è **continua** in  $x_0$  quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero quando

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c. se } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \text{allora } f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

## Esempi di funzioni continue

- $y = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$  (funzioni costanti = rette orizzontali);
- le funzioni lineari;
- le funzioni potenza  $y = x^n$
- le funzioni esponenziali  $y = a^x$ ;
- le funzioni logaritmiche  $y = \log_a(x)$
- le funzioni trigonometriche  $y = \sin(x)$  e  $y = \cos(x)$ .

## Condizione necessaria e sufficiente per funzioni continue

Una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in un punto  $x_0$  se e solo se il limite sinistro e destro per  $x \rightarrow x_0$  esistono e sono uguali a  $f(x_0)$ , cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



# Discontinuità

## Discontinuità

Una funzione si dice **discontinua** se non è continua.

## Discontinuità eliminabile

$x_0$  è una discontinuità eliminabile quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

## Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale discontinuità è eliminabile poiché il limite destro e sinistro per  $x \rightarrow 0$  esistono e sono uguali a 0, ma in  $x = 0$  la funzione assume il valore  $f(0) = 1$ , quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

## Discontinuità di prima specie

$x_0$  è una discontinuità di prima specie se il limite sinistro e destro per  $x \rightarrow x_0$  esistono finiti, ma sono diversi fra loro, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad c \neq d$$

## Esempio

La funzione  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  ha una discontinuità di prima specie in  $x = 0$ .

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

## Discontinuità di seconda specie

$x_0$  è una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) per  $x \rightarrow x_0$  non esiste o esiste infinito

## Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  è una discontinuità di seconda specie, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

# Massimi e minimi

## Definizione (Massimo)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Si definisce **massimo** di  $A$  un numero  $M \in A$  tale che

$$M \geq a \quad \forall a \in A$$

## Definizione (Minimo)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Si definisce **minimo** di  $A$  un numero  $m \in A$  tale che

$$m \leq a \quad \forall a \in A$$

## Esempio

Sia  $A = [1, 4]$ . Il massimo e il minimo di  $A$  sono rispettivamente

$$M = 4 \quad m = 1$$

## Osservazione

Non sempre esistono il massimo e il minimo.

Controesempio: l'intervallo  $(1, 4)$  non ammette né massimo né minimo.

# Massimi e minimi di una funzione

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in A$  e  $I_{x_0}$  un intorno di  $x_0$ .

## Definizione (Massimo locale)

Diremo che  $x_0$  è un punto di **massimo locale** (o relativo) se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

## Esempio

La parabola  $y = -x^2$  ha un massimo locale in  $x = 0$ .

## Definizione (Minimo locale)

Diremo che  $x_0$  è un punto di **minimo locale** (o relativo) se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

# Massimi e minimi di una funzione

## Definizione (Massimo globale)

Diremo che  $x_0$  è un punto di **massimo globale** (o assoluto) se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

## Esempio

La parabola  $y = -x^2$  ha un massimo globale in  $x = 0$ .

## Definizione (Minimo globale)

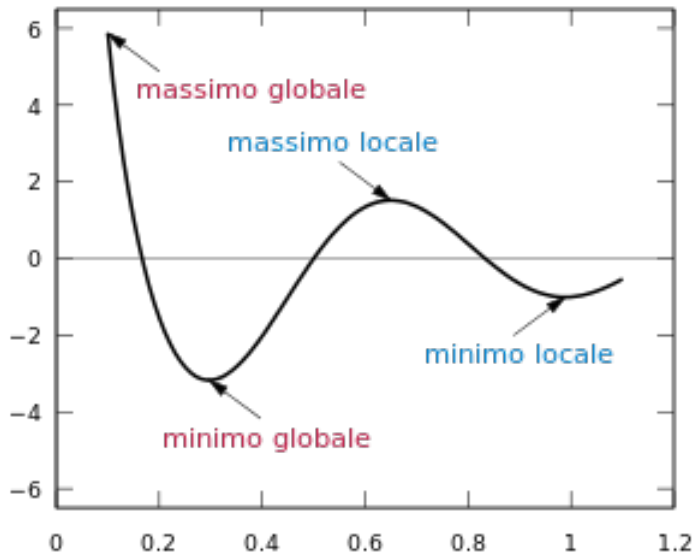
Diremo che  $x_0$  è un punto di **minimo globale** (o assoluto) se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

## Esempio

La funzione  $y = |x^2 - 1|$  ammette due minimi globali per  $x = -1$  e  $x = 1$  e un massimo locale per  $x = 0$ . Non ci sono massimi globali.

# Massimi e minimi di una funzione



## Teorema (di Weierstrass)

*Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  ammette massimo e minimo assoluti in  $[a, b]$ <sup>a</sup>.*

---

<sup>a</sup>Gli intervalli con gli estremi inclusi sono chiusi e limitati.

## Esempio

La retta  $y = 2x$  è una funzione continua. Se restringiamo il suo dominio ad un intervallo chiuso e limitato, ad esempio  $[1, 3]$ , sono soddisfatte le ipotesi del teorema. Di conseguenza vale la tesi, infatti essa ammette un minimo globale in  $x = 1$  ( $y = 2$  è il valore minimo assunto dalla funzione in  $[1, 3]$ ) e un massimo globale in  $x = 3$  ( $y = 6$  è il valore massimo assunto dalla funzione in  $[1, 3]$ ).



# Teorema di Darboux e degli zeri

## Teorema (di Darboux (o dei valori intermedi))

*Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  assume, almeno una volta, tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo.*

## Osservazione

Il massimo e il minimo esistono poiché le ipotesi sono le stesse del teorema di Weierstrass.

## Teorema (degli zeri)

*Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .*

# Metodo di bisezione

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e tale che  $f(a) \cdot f(b) < 0$  sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, quindi esiste un punto  $c \in [a, b]$  che interseca l'asse  $x$ . Se è possibile determinare tale punto  $c$  per via algebrica si può utilizzare il **metodo di bisezione**.

## Metodo di bisezione

- 1 Sia  $c = \frac{a+b}{2}$ . Se  $f(c) = 0$  abbiamo trovato il punto d'intersezione tra  $f$  e l'asse  $x$ . Se  $f(c) \neq 0$  si va avanti.
- 2 Si individua in quale fra i due intervalli  $[a, c]$  e  $[c, b]$  la funzione  $f$  ammette valori discordi e si ripete il procedimento del passo precedente utilizzando il nuovo intervallo individuato.
- 3 Si itera il procedimento finché non si giunge ad un intervallo che consente di approssimare lo zero con la precisione voluta.

## Esempio

La funzione  $f(x) = 2^x + x$  nell'intervallo  $[-1, 0]$  soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri poiché

- $[-1, 0]$  è un intervallo chiuso e limitato;
- $f(x)$  è continua in  $[-1, 0]$ ;
- $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$  e  $f(0) = 1 > 0$ ;

quindi esisterà un punto  $c \in [-1, 0]$  t.c.  $f(c) = 0$ . Per determinarlo dovremmo risolvere l'equazione  $2^x + x = 0$ , ma essa non è risolubile per via algebrica. Possiamo localizzare la soluzione dell'equazione utilizzando il metodo di bisezione.

# Metodo di bisezione

- Sia  $c = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ . Poiché  $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0,21 \neq 0$  andiamo avanti.
- Poiché  $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0,21 > 0$  iteriamo il ragionamento sull'intervallo  $[-1, -\frac{1}{2}]$ .
- Sia  $c = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$ . Poiché  $f\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq -0,16 < 0$  la soluzione sarà nell'intervallo  $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ .
- Sia  $c = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{8}$ . Poiché  $f\left(-\frac{5}{8}\right) \simeq 0,02 > 0$  la soluzione sarà nell'intervallo  $\left[-\frac{5}{8}, -\frac{3}{4}\right]$ .
- Sia  $c = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{5}{8}}{2} = -\frac{11}{16}$ . Poiché  $f\left(-\frac{11}{16}\right) \simeq -0,07 < 0$  la soluzione sarà nell'intervallo  $\left[-\frac{11}{16}, -\frac{5}{8}\right]$ .