



Università di Cagliari  
Corso di Laurea in Farmacia

# MATEMATICA INTEGRALI

Sonia Cannas

A.A. 2020/2021

## Problemi con l'operazione inversa della derivazione

Quando nei modelli dinamici si cerca l'andamento temporale di una grandezza variabile di cui è noto il tasso istantaneo di variazione si ricorre all'operazione inversa della derivazione.

## Esempio

Supponiamo di conoscere la velocità  $v(t)$  con cui si muove un oggetto e di voler determinare la legge oraria del moto  $s = s(t)$ . Poiché

$$v(t) = s'(t)$$

dobbiamo determinare una funzione  $s(t)$  la cui derivata sia  $v(t)$ .

## Problema

In generale, data una funzione  $f$ , esiste ed è possibile determinare una funzione la cui derivata sia  $f$ ?

## Definizione (Primitiva)

Una funzione  $F$  si dice **primitiva** di una funzione  $f$  in un intervallo  $I$  se è derivabile in  $I$  e se la sua derivata coincide con  $f$  per ogni  $x \in I$ , cioè

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad (1)$$

## Esempio

La funzione  $F(x) = x^3$  è una primitiva di  $f(x) = 3x^2$  in  $I = \mathbb{R}$ . Infatti  $F'(x) = 3x^2 = f(x)$ .

## Esempio

La funzione  $F(x) = \log(x)$  è una primitiva di  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $I = (0, +\infty)$ .  
Infatti  $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ .

## Osservazione

La primitiva di una funzione non è unica. Le primitive sono infinite.

## Esempio

La funzione  $F(x) = x^3$  è una primitiva di  $f(x) = 3x^2$ , ma sono primitive di  $f$  anche  $G(x) = x^3 + 1$ ,  $H(x) = x^3 + 2$ ,  $\dots$ , poiché la derivata di una costante è nulla. In generale tutte le funzioni della forma  $x^3 + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , sono primitive di  $f$ . Le primitive sono quindi infinite.

L'operazione che associa ad ogni funzione derivabile la sua derivata si chiama *derivazione*. Il procedimento inverso, che consiste nel determinare, se esistono, tutte le infinite primitive di una data funzione si chiama *integrazione*.

## Definizione (Integrale indefinito)

Si definisce **integrale indefinito** di una funzione  $f$  l'insieme di tutte le primitive di  $f$  e si indica con

$$\int f(x)dx \quad (2)$$



# L'integrale indefinito



$$\int e^x dx = e^x + c$$



$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$$



# Integrali indefiniti immediati

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

Esempio

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Esempio

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Esempio

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

## Linearità dell'integrale

Gli integrali godono delle seguenti importanti proprietà:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad k \in \mathbb{R} \quad (3)$$

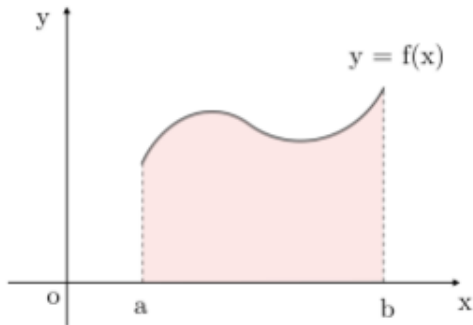
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (4)$$

## Esempio

$$\begin{aligned} \int \left( 4x^2 - \frac{5}{x} + 7e^x \right) dx &= 4 \int x^2 dx - 5 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int e^x dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \log |x| + 7e^x + c \end{aligned}$$

## Problema

Consideriamo una funzione  $y = f(x)$  continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . È possibile determinare l'area della regione delimitata dal grafico di  $f$  e dall'asse  $x$ ?



## Area sottesa da una retta orizzontale

Se la funzione è una retta orizzontale  $y = k$  il problema è facilmente risolvibile: bisognerebbe calcolare l'area di un rettangolo di base  $b - a$  e di altezza  $k$ , quindi

$$A = (b - a) \cdot k$$

## Strategia generale

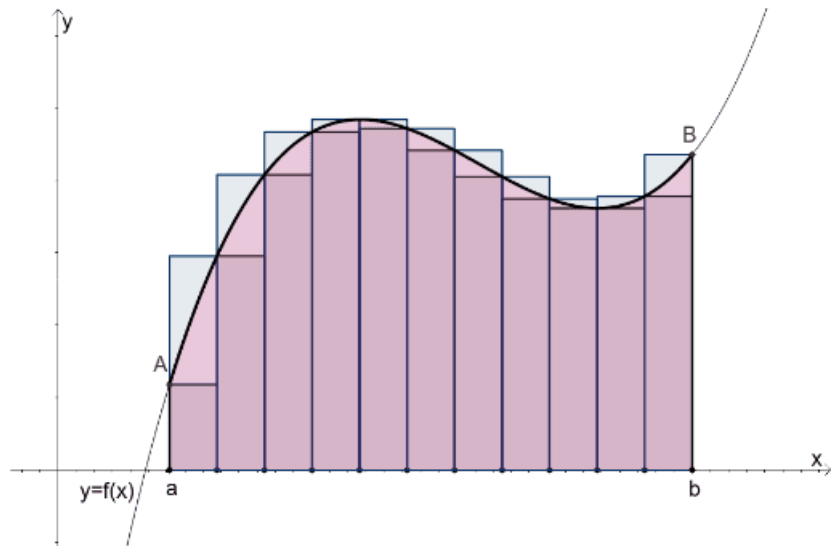
Se la funzione è più complessa, in particolare se non ha tratti rettilinei, non è possibile sfruttare il calcolo dell'area di una figura geometrica nota. Possiamo però suddividere e approssimare l'area sottesa dalla funzione  $f$  con figure geometriche di cui è semplice calcolare l'area, ad esempio con rettangoli.

## Costruzione dell'integrale definito

- 1 Suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in più intervalli mediante i punti di suddivisione  $x_i$  t.c.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ;
- 2 in ciascun intervallino  $[x_{i-1}, x_i]$  costruiamo due rettangoli di base  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ , uno di altezza  $L_i$  che approssima l'area sottesa da  $f$  in  $[x_{i-1}, x_i]$  per eccesso, l'altro di altezza  $l_i$  che approssima l'area sottesa da  $f$  per difetto;
- 3 le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da  $f$  per eccesso saranno date da  $L_i \cdot \Delta x_i$ , quelle dei rettangoli che approssimano  $f$  per difetto da  $l_i \cdot \Delta x_i$ ;
- 4 definiamo **somma superiore** e **somma inferiore** le aree ottenute sommando le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da  $f$  per eccesso e per difetto rispettivamente, cioè

$$S = \sum_{i=1}^n L_i \cdot \Delta x_i \quad s = \sum_{i=1}^n l_i \cdot \Delta x_i$$

# Integrale definito



## Costruzione dell'integrale definito

È possibile dimostrare che, per ogni suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  nei punti  $x_i$ , la somma inferiore è sempre minore della somma superiore, cioè

$$s \leq S$$

Al variare della suddivisione di  $[a, b]$  variano anche  $S$  e  $s$ , ma vale sempre la relazione di disuguaglianza di sopra. In particolare, fra tutte le somme inferiori consideriamo quella maggiore di tutte, cioè  $\sup s$ . Similmente, fra tutte le possibile somme superiori consideriamo quella minore, cioè  $\inf S$ . Poiché la disuguaglianza di sopra vale per qualsiasi suddivisione, allora

$$\sup s \leq \inf S$$



## Definizione (Integrale definito)

Si definisce **integrale definito** di una funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  il numero  $s = \inf S$  e si denota con

$$\int_a^b f(x) dx$$

## Significato geometrico dell'integrale definito

L'integrale definito è un numero che rappresenta l'area delimitata da una funzione  $f$  e dall'asse  $x$  in un intervallo  $[a, b]$ .

Per il calcolo degli integrali definiti si può sfruttare il seguente teorema.

## Teorema (Fondamentale del calcolo integrale)

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $F(x)$  una sua primitiva.  
Allora

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (5)$$

## Esempio

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

## Esempio

$$\int_1^2 3e^x dx = 3 \int_1^2 e^x dx = 3 [e^x]_1^2 = 3[e^2 - e^1] = 3e^2 - 3e$$

## Esempio

$$\begin{aligned} \int_3^4 \left( \frac{7}{x+1} + 4x^3 \right) dx &= [7 \log |x+1| + x^4]_3^4 = \\ &= 7 \log |4+1| + 4^4 - (7 \log |3+1| + 3^4) = \\ &= 7 \log(5) + 256 - 7 \log(4) - 81 = \\ &= \log(5^7) - \log(4^7) + 175 = \\ &= \log \left( \frac{5^7}{4^7} \right) + 175 = \\ &= \log \left( \frac{5}{4} \right)^7 + 175 \simeq 176,562 \end{aligned}$$