



Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

MATEMATICA
FONDAMENTI DI MATEMATICA
INSIEMI E NUMERI

Sonia Cannas
A.A. 2021/2022

Dal particolare...

Le civiltà più antiche studiarono per millenni problemi matematici, in particolare legati alla geometria, che scaturivano da questioni pratiche. Si raccolsero molti risultati, ma risultavano spesso frammentari, vaghi e slegati tra loro.

...al generale

I greci cominciarono ad avere l'esigenza di una visione unitaria, più generale. Tale visione arrivò a compimento con Euclide (III secolo a.C. circa) con i suoi "Elementi".

Gli "Elementi" di Euclide

Gli "Elementi" sono ancora oggi un'opera importante per due motivi:

- raccolgono tutti i risultati fino ad allora noti in geometria;
- introducono metodo assiomatico.

Metodo assiomatico

Alla base della costruzione assiomatica vi sono:

- le **nozioni primitive**, cioè concetti intuitivi e semplici non definiti attraverso concetti definiti in precedenza;
- gli **assiomi**, cioè proposizioni evidenti assunti per veri a priori.

Attraverso le nozioni primitive si introducono nozioni tramite definizioni rigorose. Partendo dagli assiomi si deducono nuove proposizioni le quali vengono dimostrate rigorosamente.

Proposizione

Affermazione, veicolata da un enunciato, di cui si può stabilire con certezza se è vera o falsa.

Esempi proposizioni matematiche

- 6 è un numero primo.
- Il carbonio è un elemento chimico della tavola periodica degli elementi.

Esempi proposizioni non matematiche

- Questo corso di matematica sembra bello.
- I miei colleghi di università sono antipatici.

Teorema

Proposizione dimostrata logicamente a partire da assiomi o da altre proposizioni.

Nei trattati moderni i teoremi sono spesso chiamati proposizioni. Si conserva il termine teorema per le proposizioni importanti.

Ipotesi e tesi di un teorema

La maggior parte degli enunciati dei teoremi sono del tipo

$$I \Rightarrow T$$

e si legge "**se** I **allora** T " oppure " I **implica** T " oppure " I è **condizione sufficiente per** T ", dove

- " I " sono le **ipotesi** del teorema, cioè le condizioni assunte per vere;
- " T " è la **tesi**, cioè la condizione o proprietà da dimostrare sulla base delle ipotesi.

Il simbolo \Rightarrow è il connettivo logico di **implicazione**.

Esempio

Se x è un numero pari allora è divisibile per 2.

Ipotesi: " x è un numero pari"

Tesi: " x è divisibile per 2"

Dimostrazione di un teorema

L'enunciato di un teorema deve essere dimostrato. La dimostrazione è un processo costituito da deduzioni logiche che, partendo dalle ipotesi e sfruttando assiomi o precedenti teoremi, consentono di verificare la validità della tesi.

Tecniche dimostrative

Per dimostrare una proposizione esistono vari metodi. Alcuni esempi sono:

- dimostrazioni per assurdo;
- dimostrazioni per induzione;
- controesempi.

Osservazione

Non è possibile dimostrare un teorema attraverso esempi.

Esempio

Se volessimo dimostrare la validità della proposizione "tutti i numeri primi sono dispari" non possiamo elencare vari numeri primi che sono dispari. La proposizione potrebbe essere vera per tantissimi casi, ma basta un solo caso che la nega per affermare che è falsa.

Controesempio

Per dimostrare che la proposizione "tutti i numeri primi sono dispari" è falsa è sufficiente osservare che il numero 2 è primo ma non è dispari. Tale esempio è un controesempio che dimostra che l'affermazione in generale non è vera.

Osservazione

Le scritte $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ non sono equivalenti!

Esempio

"Se Aki è un cane allora è un mammifero" è sicuramente vera.

"Se Aki è un mammifero allora è un cane" non è vera in generale.

Equivalenze logiche

Se valgono simultaneamente sia $A \Rightarrow B$, sia $B \Rightarrow A$, allora A e B sono equivalenti. Si scrive

$$A \Leftrightarrow B$$

e si legge "**A se e solo se B**" oppure **condizione necessaria e sufficiente affinché A sia vera è che B sia vera.**

Quantificatore universale

I termini *per ogni*, *qualsiasi*, *tutti* sono quantificatori universali che si indicano con il simbolo

$$\forall$$

Quantificatore esistenziale

I termini *esiste*, *esiste almeno un* sono quantificatori esistenziali che si indicano con il simbolo

$$\exists$$

Insieme

In matematica con il termine **insieme** si intende una collezione di oggetti di qualsiasi natura. Il concetto di insieme è una **nozione primitiva**.

Elementi di un insieme

Gli oggetti di un insieme sono detti **elementi**.

Notazione

Solitamente un generico insieme si denota con una lettera latina maiuscola, mentre si utilizzano le lettere latine minuscole per indicare i suoi elementi.

Per descrivere un insieme è necessario conoscere quali elementi gli appartengono, e ciò può avvenire in due modi:

- precisando le proprietà che caratterizzano tutti gli elementi dell'insieme.

Esempio

$$B = \{\text{tutti i numeri pari}\}$$

$$C = \{\text{mammiferi}\}$$

- elencando tutti gli elementi dell'insieme tra parentesi graffe;

Esempio

$$A = \{a, e, b, c, d, f\}$$

Osservazione

Quando si descrive un insieme elencandone gli elementi non ha importanza l'ordine in cui essi vengono elencati, né devono essere ripetuti.

Osservazione

Gli insiemi possono essere finiti, come nel primo esempio, oppure infiniti, come nel secondo esempio.

Se a è un elemento dell'insieme A , si dice che a *appartiene ad* A e si esprime con la seguente notazione:

$$a \in A$$

Se, viceversa, un elemento a non appartiene ad A , si scrive:

$$a \notin A$$

Rappresentazione grafica degli insiemi

Gli insiemi possono essere rappresentati graficamente attraverso i **diagrammi di Eulero-Venn**, in cui gli elementi sono rappresentati da punti racchiusi all'interno di una linea chiusa non intrecciata.

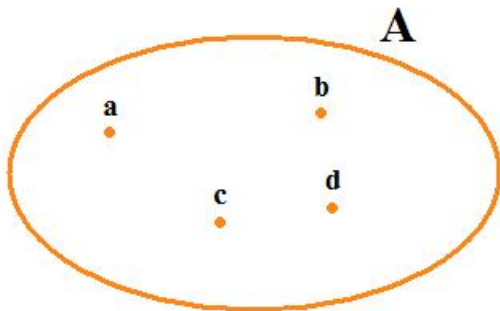


Figura: Rappresentazione dell'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ attraverso il diagramma di Eulero-Venn

È opportuno introdurre due insiemi particolari: l'insieme vuoto e il singoletto.

Insieme vuoto

L'**insieme vuoto** è l'insieme privo di elementi, e si denota con il simbolo \emptyset .

Singoletto

Il **singoletto** è un insieme costituito da un solo elemento, ad esempio $A = \{a\}$.

Definizione (Sottoinsieme)

Un insieme B si dice **sottoinsieme** di un insieme A (e si scrive $B \subseteq A$) o, equivalentemente, che B è **incluso** in A , se ogni elemento di B è anche elemento di A , cioè:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \quad \forall x \in B$$

Esempio

Sia $A = \{\text{mesi dell'anno}\}$. Allora $B = \{\text{febbraio, luglio, agosto}\}$ è un sottoinsieme di A .

Esempio

Sia $A = \{\text{triangoli isosceli}\}$. Allora $B = \{\text{triangoli equilateri}\}$ è un sottoinsieme di A .

Osservazione

Dalla definizione osserviamo che tra i sottoinsiemi di un insieme ci sono anche l'insieme vuoto e l'insieme stesso, e sono detti **sottoinsiemi impropri**.

I primi numeri che abbiamo conosciuto sono quelli usati comunemente per contare, sono costruiti attraverso un sistema di assiomi in cui si parte dallo zero e ogni numero successivo si ottiene aggiungendo 1. Tali numeri formano l'insieme dei **numeri naturali**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Su questo insieme abbiamo imparato a svolgere le 4 operazioni sin dalla scuola elementare. Osserviamo però che mentre è sempre possibile eseguire addizioni e moltiplicazioni, non sempre sono lecite sottrazioni e divisioni: nell'insieme dei numeri naturali è possibile calcolare $5 - 3$ ma non, ad esempio, $3 - 5$. Quindi \mathbb{N} è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione, ma non rispetto alla sottrazione e alle divisione.

Il problema della sottrazione viene superato introducendo un nuovo insieme numerico, definito a partire dai numeri naturali: l'insieme dei **numeri interi**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Tale insieme è costituito da tutti i numeri naturali e dai loro opposti (eccetto lo zero).

Osservazione

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Nonostante \mathbb{Z} sia chiuso rispetto alla sottrazione, non lo è rispetto alla divisione: è possibile calcolare $8 : 2$ ma non $2 : 8$.

Per poter eseguire sempre anche l'operazione di divisione è stato ampliato l'insieme dei numeri interi ottenendo l'insieme dei **numeri razionali**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Osservazione

Le frazioni possono rappresentare:

- numeri interi (es: $-\frac{6}{3} = -2$);
- numeri decimali finiti (es: $\frac{1}{4} = 0,25$);
- numeri decimali periodici (es: $-\frac{1}{3} = -0,\bar{3}$).

Osservazione

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Esistono anche numeri decimali che hanno infinite cifre dopo la virgola ma che non sono periodici, ad esempio: π , e , $\sqrt{2}$. Tali numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ai numeri razionali formano l'insieme dei **numeri reali**, che si indica con \mathbb{R} .

Osservazione

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Esistono due tipi di numeri irrazionali:

- *irrazionali algebrici*: numeri ottenuti come soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti interi (ad esempio $\sqrt{2}$);
- *irrazionali trascendenti*: numeri irrazionali che non sono algebrici (ad esempio π , e , ϕ).

Insiemi numerici: rappresentazione dei reali sulla retta

I numeri reali possono essere rappresentati su una retta detta *retta reale*: ad ogni numero viene associato un punto della retta, viceversa ad ogni punto viene associato un numero reale. In tal modo viene stabilita una corrispondenza tra \mathbb{R} e la retta reale detta *corrispondenza biunivoca*.

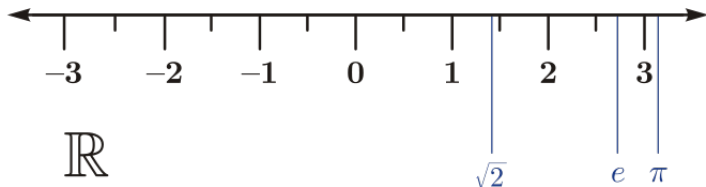


Figura: Retta reale

Intervallo di numeri reali

Dati due numeri $a, b \in \mathbb{R}$, si definisce **intervallo** ciascuno dei seguenti insiemi:

- intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- intervallo chiuso a sinistra $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- intervallo chiuso a destra $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Gli intervalli appena definiti sono limitati poiché ogni x appartenente all'intervallo varia tra due numeri fissati. Esistono anche intervalli illimitati:

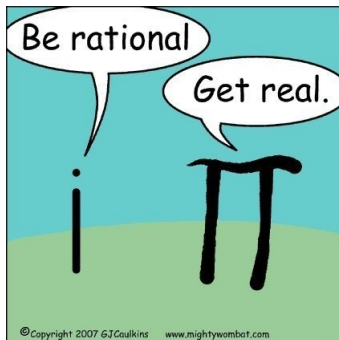
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Insiemi numerici: c'è qualcosa oltre i reali?

I **numeri complessi**, il cui insieme è denotato con \mathbb{C} , sono tutti i numeri della forma $a + ib$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e i è la soluzione dell'equazione $x^2 = -1$, ed è detta **unità immaginaria**.

Osservazione

Se $b = 0$ allora il numero complesso $a + ib = a$ diventa un numero reale. Quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Definizione (Intersezione)

Siano A e B due insiemi. Si definisce **intersezione** fra A e B , e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B , cioè:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Esempio

Siano $A = \{2, 7, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 9\}$. Allora $A \cap B = \{2\}$.

Esempio

Siano $A = (-\frac{5}{2}, 3)$ e $B = [\sqrt{2}, 8)$. Allora $A \cap B = [\sqrt{2}, 3)$.

Esempio

Siano $A = [-\frac{30}{7}, 5)$ e $B = (7, \frac{101}{5})$. Allora $A \cap B = \emptyset$.

Può capitare che due insiemi non abbiano alcun elemento in comune, in tal caso la loro intersezione è l'insieme vuoto. Due insiemi la cui intersezione è vuota sono detti **disgiunti**.

Definizione (Unione)

Siano A e B due insiemi. Si definisce **unione** fra A e B , e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A o a B , ivi compresi gli elementi in comune, cioè:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Esempio

Siano $A = \{2, 7, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 9\}$. Allora $A \cup B = \{2, 7, 5, 0, 1, 9\}$.

Esempio

Siano $A = [-\frac{1}{9}, e)$ e $B = (-\frac{1}{3}, 1]$. Allora $A \cup B = (-\frac{1}{3}, e)$.

Definizione (Differenza insiemistica)

Dati due insiemi A e B , si definisce **differenza insiemistica** fra A e B , e si indica con $A \setminus B$, la totalità degli elementi di A che non appartengono a B , cioè:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Esempio

Siano $A = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$ e $B = \{0, 1, 9\}$.

Allora $A \setminus B = \{2, 4, 7, 8\}$.

Esempio

Siano $A = [-1, \frac{1}{3}]$ e $B = (0, \frac{3}{4})$.

Allora $A \setminus B = [-1, 0]$. Invece $B \setminus A = (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$.

Definizione (Insieme complementare)

Sia $B \subseteq A$. Si definisce **insieme complementare** di B rispetto ad A l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B , cioè^a:

$$\overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

^aAlcuni testi indicano il complementare di un insieme B non con il simbolo \overline{B} ma con $C(B)$ o anche B^c .

Esempio

Consideriamo $A = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$ e sia $B = \{0, 7, 8\}$.
Allora $\overline{B} = \{1, 2, 4\}$.

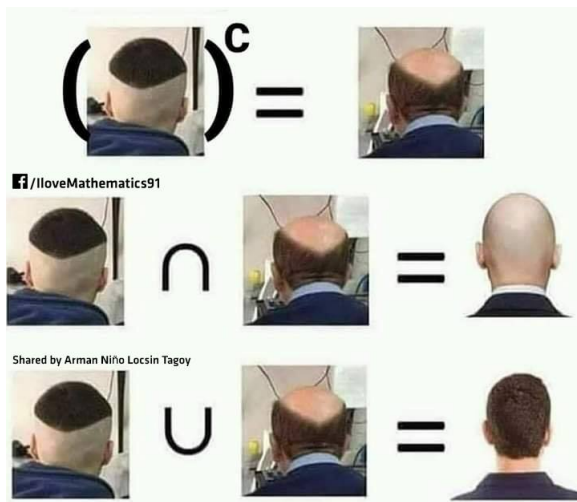
Esempio

Siano $A = (0, 3)$ e $B = [1, 3)$.
Allora $\overline{B} = (0, 1)$.

Osservazione

Le definizioni di insieme complementare e di differenza insiemistica apparentemente sembrerebbero identiche, osserviamo però che nella differenza insiemistica non è richiesto che $B \subseteq A$.

Complementare, intersezione, unione



Prodotto cartesiano

Definizione (Prodotto cartesiano)

Siano A e B due insiemi. Si definisce **prodotto cartesiano** fra A e B , e si indica con $A \times B$, l'insieme formato dalle coppie ordinate (a, b) , dove $a \in A$ e $b \in B$, cioè:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Esempio

Siano $A = \{2, 7, 5\}$ e $B = \{a, b\}$. Allora
 $A \times B = \{(2, a), (2, b), (7, a), (7, b), (5, a), (5, b)\}$.

Esempio

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Osservazione

Le coppie sono ordinate, cioè $(a, b) \neq (b, a)$.

La Terra orbita attorno alla stella madre del sistema solare, il sole, il cui diametro è:

1 400 000 000 m

Essa è costituita principalmente da atomi di idrogeno (circa il 74% della sua massa), e il diametro di un atomo di idrogeno è:

0,000 000 000 1 m

È evidente che è molto scomodo leggere questi due numeri. Per risolvere il problema si potrebbero utilizzare i multipli e i sottomultipli del metro. Un'altra alternativa è scrivere e leggere questi numeri rappresentandoli in **notazione scientifica**, cioè scrivendoli come prodotto di un coefficiente compreso tra 1 e 10 e una potenza di 10.

Quindi possiamo esprimere il diametro del sole in notazione scientifica come

$$d_{sole} = 1\,400\,000\,000 \text{ m} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$$

e il diametro dell'atomo di idrogeno in notazione scientifica nel seguente modo:

$$d_H = 0,000\,000\,000\,1 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Durante la fase di misurazione per avere una certa accuratezza spesso si riportano dati numerici che hanno molte cifre dopo la virgola. In alcuni casi però è scomodo utilizzare tali numeri, perciò si preferisce *arrotondarli* (o *approssimarli*). Arrotondare un numero significa approssimarlo seguendo queste due regole:

- se la prima cifra che si cancella è 0, 1, 2, 3, 4 si lascia uguale la cifra che la precede (arrotondamento per difetto);
- se la prima cifra che si cancella è 5, 6, 7, 8, 9 si aumenta di una unità la cifra che la precede (arrotondamento per eccesso).

Esempio

$$28,421 \simeq 28,42$$

$$27,387 \simeq 27,39$$

$$51,0632 \simeq 51,1$$

Definizione (Proporzione)

Si definisce **proporzione** l'uguaglianza tra due rapporti.

Quattro numeri $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vengono detti in proporzione fra loro se il rapporto tra i primi due è uguale al rapporto tra gli ultimi due:

$$a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La proporzione $a : b = c : d$ si legge "a sta a b come c sta a d". Inoltre a e d sono detti *estremi*, mentre b e c sono detti *medi*.

Esempio

$$10 : 5 = 8 : 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{5} = \frac{8}{4}.$$

Esempio

$$3 : 9 = 10 : 30 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{9} = \frac{10}{30}.$$

Teorema (Proprietà fondamentale delle proporzioni)

In una proporzione $a : b = c : d$ il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Dimostrazione.

Per definizione ogni proporzione si esprime come uguaglianza fra rapporti, quindi è possibile esprimerla come $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b} = \frac{c}{d} \cdot b$$

$$a = \frac{cb}{d}$$

$$a \cdot d = \frac{cb}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$



Esempio

Per determinare il valore dell'incognita x proporzione $6 : 8 = x : 32$ basta applicare la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$6 \cdot 32 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \cdot 32}{8} = 24$$

In alternativa, si può arrivare allo stesso risultato scrivendo la proporzione come uguaglianza di rapporti:

$$\begin{aligned} \frac{6}{8} &= \frac{x}{32} \\ \frac{6}{8} \cdot 32 &= \frac{x}{\cancel{32}} \cdot \cancel{32} \\ 24 &= x \end{aligned}$$

Esempio

Da un rubinetto di una vasca fuoriescono 60 litri di acqua in 4 minuti. Quanti litri di acqua fuoriescono dalla vasca in mezz'ora?

Soluzione.

Il problema può essere formalizzato con la seguente proporzione:

$$60 \text{ l} : 4 \text{ min} = x \text{ l} : 30 \text{ min}$$

da cui, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni

$$60 \cdot 30 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60 \cdot 30}{4} = 450 \text{ l}$$

La percentuale $p\%$ indica il rapporto fra una quantità p e il totale espresso con 100, cioè:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Esempio

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Esempio

Un esame, sostenuto da 150 candidati, è stato superato solo da 90 candidati. Calcolare la percentuale dei promossi.

Soluzione.

È sufficiente calcolare $\frac{90}{150} = 0,60 \Rightarrow 60\%$.

In alternativa, il problema può essere formalizzato con la seguente proporzione:

$$p : 100 = 90 : 150$$

da cui

$$p = \frac{100 \cdot 90}{150} = \frac{9000}{150} = 60$$

La percentuale dei promossi è 60%.

Diversi problemi con le percentuali si possono formalizzare con una proporzione del tipo

$$p : 100 = \text{parte} : \text{totalità}$$

CORRIERE DELLA SERA / SCUOLE ELEMENTA



0



26



IL CONVEGNO

Discalculia, i ragazzi con difficoltà in matematica raddoppiano: +50% in quattro anni

Le diagnosi di discalculia sono passate da 33.257 nel 2014 a 62.877 nel 2017. La psicologa: «Numeri sottostimati. La scuola sa ancora poco sull'argomento». L'esperto: «Attenti agli eccessi di diagnosi, frenano la motivazione»

di Antonella De Gregorio

Esempio: casi totali SARS-CoV2 in USA e India

Nazione	Positivi SARS-CoV2	Tamponi	Popolazione
USA	45.179.209	657.102.757	333.468.970
India	33.952.275	581.312.481	1.397.235.287

In USA la percentuale di positivi in relazione al numero dei tamponi effettuati e la percentuale di tamponi sul numero di abitanti sono

$$\frac{45.179.209}{657.102.757} \simeq 0,0688 \Rightarrow 6,88\%$$
$$\frac{657.102.757}{333.468.970} \simeq 1,97 \Rightarrow 197\%$$

La percentuale di positivi sull'intera popolazione è

$$\frac{45.179.209}{333.468.970} \simeq 0,1355 \Rightarrow 13,55\%$$

In India la percentuale di positivi in relazione al numero dei tamponi effettuati e la percentuale di tamponi sul numero di abitanti sono

$$\frac{33.952.275}{581.312.481} \simeq 0,0584 \Rightarrow 5,84\%$$
$$\frac{581.312.481}{1.397.235.287} \simeq 0,416 \Rightarrow 41,6\%$$

Le percentuali di positivi sull'intera popolazione è

$$\frac{33.952.275}{1.397.235.287} \simeq 0,024 \Rightarrow 2,4\%$$