Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Funzioni

Sonia Cannas

A.A. 2021/2022

Funzioni: definizione

Nelle precedenti lezioni abbiamo visto che le funzioni sono particolari tipi di relazioni tra due insiemi.

Definizione (Funzione)

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una **funzione** *(o* **applicazione** *o* **mappa***) da A a B è una relazione che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. L'insieme A di partenza viene detto* **dominio** *e l'insieme B di arrivo* **codominio** *della funzione.*

Matematicamente una funzione f si esprime nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

L'elemento $y = f(x)$ viene chiamato *immagine* di x, mentre x è chiamato *controimmagine* di y.
L'insieme di tutte le immagini $y \in B$ si denota con $Im(f)$, ed è un sottoinsieme del codominio B.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

f è una funzione, poiché ad ogni residente in Italia corrisponde uno ed un solo codice fiscale.

Funzioni: definizione

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia il suo codice fiscale.

f è una funzione, poiché ad ogni residente in Italia corrisponde uno ed un solo codice fiscale.

Funzione identità

Una relazione $f : A \to A$ che associa ad ogni elemento di A sé stesso, cioè tale che

$$f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

è una funzione detta *funzione identità* (o identica). La indicheremo con Id_A.

Funzioni iniettive

Definizione (Funzione iniettiva)

Una funzione $f : A \to B$ *si dice* **iniettiva** *se ad elementi distinti del dominio* A *corrispondono elementi distinti del codominio* B*, cioè*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \;\; con\ x_1 \neq x_2, si\ ha\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio

La funzione $f : A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è iniettiva.

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{città del mondo}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni residente in Italia la città in cui è nato. La relazione f è una funzione, ma non iniettiva.

Funzioni suriettive

Definizione (Funzione suriettiva)

Una funzione $f : A \to B$ *si dice* **suriettiva** *se ogni elemento* $y \in B$ *è immagine di almeno un elemento* $x \in A$*, cioè se*

$$Im(f) = B$$

Esempio

La funzione $f : A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è suriettiva.

Esempio

Siano $A = \{\text{Nati in Italia}\}$ e $B = \{\text{Città del mondo}\}$. Sia $f : A \to B$ la relazione che associa ad ogni nato in Italia la precisa città in cui è nato, fra tutte quelle del mondo. La relazione f è una funzione, ma non suriettiva, infatti $Im(f) = \{\text{Città italiane}\} \subset B$.

Funzioni bigettive

Definizione (Funzione bigettiva)

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice **bigettiva** *se è sia iniettiva sia suriettiva.*

Esempio

La funzione $f\colon A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$, è bigettiva.

Esempio

La funzione $f\colon A \to B$, dove $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{città del mondo}\}$ non è iniettiva, quindi non è neanche bigettiva.

Esempio

La funzione $f\colon A \to B$, dove $A = \{\text{Nati in Italia}\}$ e $B = \{\text{Città del mondo}\}$ non è suriettiva, quindi non è neanche bigettiva.

Funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione. Preso $y \in Im(f)$, in generale ad esso risultano associati uno o più elementi $x \in A$ tali che $f(x) = y$. Pertanto la relazione che associa ad ogni $y \in Im(f)$ la sua controimmagine non è in generale una funzione. Lo è se, e solo se, f è iniettiva.

Definizione (Funzione inversa)

Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva. Chiamiamo sua **inversa** *la funzione f^{-1} che associa ad ogni $y \in Im(f)$ la sua controimmagine $x \in A$*

Attenzione

La notazione $f^{-1}(y) \neq \dfrac{1}{f(y)}$.

Funzione inversa

Esempio

Consideriamo la funzione $f: A \to B$, con $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$ e $B = \{\text{Codici fiscali}\}$. Essa è iniettiva, quindi possiamo definire la funzione inversa $f^{-1}: Im(f) \to A$ che ad ogni codice fiscale $y \in Im(f)$ associa la corrispondente persona $x \in A$ residente in Italia.

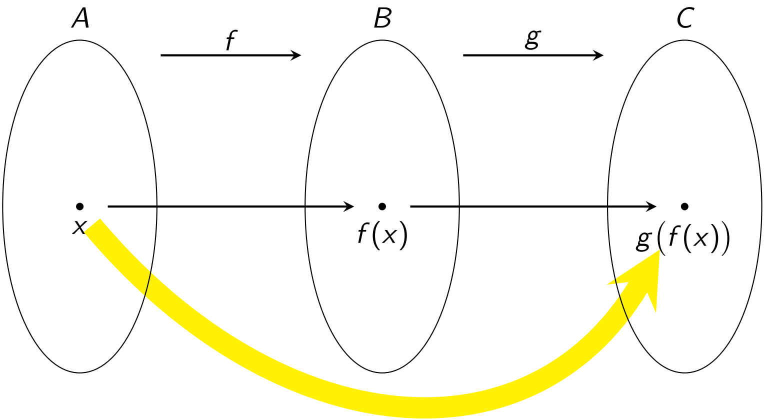
Supponiamo, ad esempio, che il codice fiscale di $x = $ Antonio Rossi sia $y = RSSNTN80A01H501O$.
Allora $f^{-1}(y) = f^{-1}(RSSNTN80A01H501O) = $ Antonio Rossi.

Composizione di funzioni

È possibile definire operazioni tra funzioni, una di esse è la composizione.

Definizione (Funzione composta)

Siano date le funzioni $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$. *Si definisce* **funzione composta**, *mediante* f *e* g, *la funzione* $h: A \to C$ *che ad ogni elemento* $x \in A$ *associa l'elemento* $h(x) = g(f(x))$.



Funzione composta

Esempio

Siano $A = \{\text{Residenti in Italia}\}$, $B = \{\text{Codici fiscali}\}$ e $C = \{\text{Sessi}\}$.
Definiamo $f : A \to B$ la funzione che ad ogni residente in Italia associa il suo codice fiscale, e $g : B \to C$ la funzione che ad ogni codice fiscale associa il sesso della persona.
Possiamo definire la funzione $h : A \to C$, che ad ogni residente in Italia $x \in A$ associa il suo sesso $g(f(x)) \in C$.

Supponiamo, ad esempio, che il codice fiscale di $x =$ Antonio Rossi sia $f(x) = RSSNTN80A01H501O$. Allora $h(x) = g(f(x)) = M$.

Osservazione

Se si compone una funzione $f : A \to B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \to A$ si ottiene la funzione identità, cioè

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$$

Grafici di funzioni reali a variabile reale

Durante il corso focalizzeremo la nostra attenzione sul caso in cui $A, B \subseteq \mathbb{R}$, cioè funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dette **funzioni reali di una variabile reale**, e possono essere descritte tramite un'espressione del tipo $y = f(x)$.

Il dominio delle funzioni reali a variabile reale è un insieme di numeri reali, e abbiamo visto che possiamo rappresentare $\mathbb{R}$ come l'insieme dei punti di una retta. Rappresenteremo questa retta orizzontalmente.
Analogamente, il codominio sarà rappresentato dai punti di una retta, che rappresenteremo verticalmente e identificheremo con l'asse verticale di un piano cartesiano.

Grafico di f

La relazione individuata dalla funzione f corrisponde all'associazione tra un'ascissa $x \in A$ e la corrispondente ordinata $y = f(x)$. Quindi il **grafico di** f è l'insieme dei punti $(x, f(x))$.

Attenzione

Non tutte le relazioni tra insiemi di numeri reali sono funzioni, quindi non tutte le equazioni algebriche rappresentano funzioni.

Esempio

Le rette che si possono esprimere nella forma $y = mx + q$ sono funzioni.
Le rette verticali, invece, non sono funzioni.

Esempio

Le parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (quindi con l'asse parallelo all'asse y) sono funzioni.
Non sono funzioni, invece, le parabole del tipo $x = ay^2 + by + c$ (quindi con l'asse parallelo all'asse x).

Esempio

Non sono funzioni le circonferenze $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Metodi per determinare se la relazione tra numeri reali data è una funzione

- La relazione è una funzione se si può esplicitare la y, quindi se si può scrivere nella forma $y = f(x)$.
- La relazione è una funzione se ogni retta verticale interseca il grafico in al più un punto (*test verticale*).

Esempio

La circonferenza non è una funzione poiché :

- dalla sua equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ non è possibile esplicitare la y e ottenere un'espressione del tipo $y = f(x)$;
- ci sono infiniti punti in cui la retta verticale interseca il grafico della circonferenza in due punti.

Grafici di funzioni reali di variabile reale

Uno degli scopi dello studio dell'analisi matematica durante il corso sarà quello di disegnare il grafico di una funzione a partire dalla sua equazione $y = f(x)$.

Il primo punto fondamentale per rappresentare il grafico di una funzione è determinare il dominio della funzione.

Funzioni monotone

Definizione (Funzione monotona crescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **monotona crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in A$, *con* $x_1 < x_2$, *si ha* $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Se $f(x_1) \leq f(x_2)$ *la funzione si dice* **strettamente crescente**.

Esempio

Le rette $y = mx + q$ con $m > 0$ sono funzioni strettamente crescenti.

Definizione (Funzione monotona decrescente)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **monotona decrescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in A$, *con* $x_1 < x_2$, *si ha* $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Se $f(x_1) > f(x_2)$ *la funzione si dice* **strettamente decrescente**.

Esempio

Le rette $y = mx + q$ con $m < 0$ sono funzioni strettamente decrescenti.

Funzioni convesse e concave

Definizione (Funzione convessa)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta **convessa** *(o con* **concavità verso l'alto***) nell'intervallo $[x_1, x_2] \subseteq A$ se la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta nell'intervallo al di sopra del grafico di f. Se tale relazione vale $\forall x_1, x_2 \in A$ la funzione è convessa in A.*

Esempio

Le parabole $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ sono funzioni convesse.

Funzioni convesse e concave

Definizione (Funzione concava)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è detta* **concava** *(o con* **concavità verso il basso***) nell'intervallo* $[x_1, x_2] \subseteq A$ *se la corda congiungente i punti* $(x_1, f(x_1)$ *e* $(x_2, f(x_2))$ *sta al di sotto del grafico di* f*. Se tale relazione vale* $\forall x_1, x_2 \in A$ *la funzione è concava in* A*.*

Esempio

Le parabole $y = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$ sono funzioni concave.

Funzioni pari e dispari

Definizione (Funzione pari)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **pari** *se* $\forall x \in A$ *risulta* $f(x) = f(-x)$.

Osservazione

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio

La parabola $y = x^2$ è pari.
Infatti:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Osservazione

Più in generale, sono pari tutte le parabole del tipo $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Più in generale, sono pari tutte le funzioni del tipo $y = ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, dove $n \in \mathbb{N}$ è pari.

Funzioni pari e dispari

Definizione (Funzione dispari)

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **dispari** *se* $\forall x \in A$ *risulta* $f(x) = -f(-x)$.

Osservazione

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

Esempio

La retta $y = 7x$ è dispari.
Infatti:

$$f(-x) = 7(-x) = -7x \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-7x) = 7x = f(x)$$

Osservazione

Più in generale, sono dispari tutte le rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Sono dispari tutte le funzioni del tipo $y = ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, dove $n \in \mathbb{N}$ è dispari.

Funzioni lineari

Le **funzioni lineari** sono definite mediante polinomi di primo grado, quindi sono della forma

$$f(x) = mx + q$$

cioè sono rette.
Le abbiamo già studiate nelle lezioni precedenti.

Funzioni potenza

Le **funzioni potenza** sono della forma

$$f(x) = ax^n \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$$

Analizziamo prima il caso in cui $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

n=1

Le funzioni potenza $f(x) = ax$ sono funzioni lineari.

n=2

Le funzioni potenza $f(x) = ax^2$, dette anche *funzioni quadrato*, sono parabole.

Funzioni potenza

n=3

La funzione potenza $f(x) = x^3$ è detta anche *funzione cubo*.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- il dominio è $\mathbb{R}$;
- $f(0) = 0$;
- è una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-x^3) = x^3 = f(x)$$

  quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
- $\forall x > 0$ risulta $x^3 > 0$, quindi il grafico sarà al di sopra dell'asse x nell'intervallo $(0, +\infty)$;
- essendo simmetrica rispetto all'origine il grafico sarà al di sotto dell'asse x nell'intervallo $(-\infty, 0)$;

Funzioni potenza

n=3

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, si ha

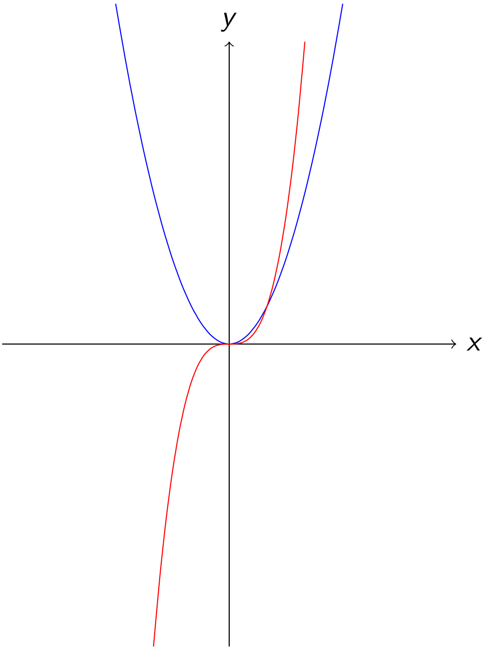
$$f(x_1) = (x_1)^3$$
$$f(x_2) = (x_2)^3$$

e, poiché $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$, quindi la funzione è strettamente crescente.

Osservazione

Per $x \geq 1$ risulta $x^3 \geq x^2$, quindi nell'intervallo $[1, +\infty)$ il grafico di $f(x) = x^3$ sarà al di sopra di quello di $f(x) = x^2$.

Funzioni potenza



In blu $f(x) = x^2$.

In rosso $f(x) = x^3$.

Funzioni potenza

In generale i grafici delle funzioni potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n \leq 2$, sono di due tipi.

n pari

- La funzione è pari:
- la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente in $(0, \infty)$

n dispari

- La funzione è dispari;
- la funzione è strettamente crescente.

Caratteristiche comuni

Tutte le funzioni potenza

- hanno dominio $D = \mathbb{R}$;
- passano per l'origine $(0, 0)$.

Funzioni potenza

Osservazione

Le funzioni $f(x) = ax^n$ hanno diversi grafici al variare di $a \in \mathbb{R}^+$, ma soddisfano le caratteristiche elencate in precedenza.

Osservazione

Se $a \in \mathbb{R}^-$ si hanno i seguenti casi:

- se n è pari la funzione è simmetrica rispetto all'asse x;
- se n è dispari la funzione è simmetrica rispetto all'origine.

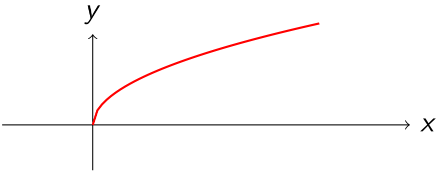
Funzioni potenza

Analizziamo ora il caso di funzioni potenza $f(x) = x^n$ dove n è frazionario e positivo.

$n = \frac{1}{2}$

Consideriamo $f(x) = \sqrt{x}$.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- ha dominio $D = [0, +\infty)$;
- $f(0) = \sqrt{0} = 0$;
- poiché il risultato di una radice è sempre un numero non negativo, la funzione è positiva;



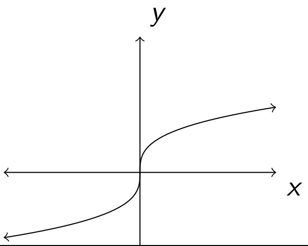
Funzioni potenza

$n = \frac{1}{3}$

Consideriamo $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Per disegnarne il grafico possiamo osservare che:

- ha dominio $D = (-\infty, +\infty)$;
- $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$;
- poiché la radice cubica di un numero reale è positiva se $x > 0$, nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è positiva;
- è una funzione dispari, infatti:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad -f(-x) = -(-\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} = f(x).$$



È possibile definire il concetto di potenza anche per esponenti irrazionali con base positiva, quindi per tutti i numeri reali con base positiva. I fenomeni che si evolvono nel tempo *in senso continuo*, cioè considerando la lancetta dei secondi che scorre con continuità, si descrivono con potenze con esponenti reali.

Definizione (Funzione esponenziale)

Si definisce **funzione esponenziale** *di base a, con a positivo e diverso da* 1, *la funzione:*

$$y = a^x \qquad con\ a > 0, a \neq 1 \tag{2}$$

Esempio

Alcuni esempi di funzioni esponenziali:

$$y = 2^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = 4^{-3x} = \left(4^{-3}\right)^x = \left(\frac{1}{4^3}\right)^x = \left(\frac{1}{64}\right)^x$$

Funzione esponenziale

Attenzione

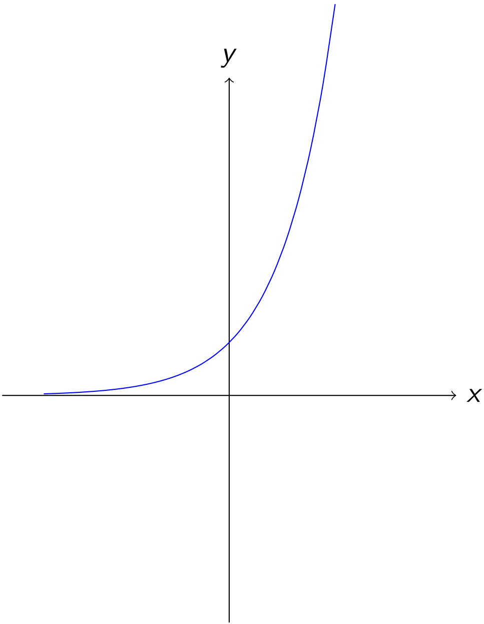
La base a è un numero fissato, l'incognita è l'esponente.

Per disegnare i grafico distinguiamo il caso $a > 1$ dal caso $0 < a < 1$.

Caso $a > 1$

- Il dominio $D = \mathbb{R}$;
- essendo la base $a > 0$, la funzione $f(x) = a^x$ è positiva, quindi il grafico è al di sopra dell'asse x;
- se $x = 0$ allora $y = a^x = 1$, quindi il grafico passa per il punto $(0, 1)$;
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ si ha $a^{x_1} < a^{x_2}$, quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente crescente.

Funzione esponenziale



Esiste un valore della base della funzione esponenziale particolarmente interessante: si tratta del **numero di Nepero**, un numero irrazionale che si indica con la lettera e le cui prime cifre decimali sono: $2,718281\ldots$.

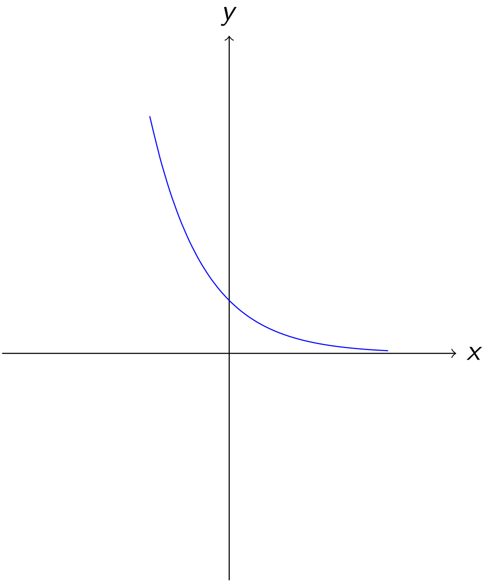
In blu il grafico dell'esponenziale $y = e^x$.

Funzione esponenziale

Abbiamo disegnato il grafico qualitativo delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con $a > 1$. Ora studiamo il caso $0 < a < 1$.

Caso $0 < a < 1$

- Il dominio $D = \mathbb{R}$;
- essendo la base $a > 0$, la funzione $f(x) = a^x$ è positiva, quindi il grafico è al di sopra dell'asse x;
- se $x = 0$ allora $y = a^x = 1$, quindi il grafico passa per il punto $(0, 1)$;
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ si ha $a^{x_1} > a^{x_2}$, quindi $f(x_1) > f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente decrescente.



In blu il grafico dell'esponenziale $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

Osservazione

$\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$

Funzioni esponenziali come modelli matematici

Le funzioni esponenziali compaiono in diversi modelli matematici.

Modello matematico

Un modello matematico è la costruzione di una particolare riproduzione della realtà, per poi poterla studiare matematicamente.
La sua realizzazione può essere schematizzata come segue.

1. Problema del mondo reale (fenomeno fisico, biologico, chimico, farmacologico, economico, ecc...).
2. Costruzione del modello.
3. Studio matematico del modello.
4. Verifica sperimentale.

Funzioni esponenziali come modelli matematici

La mitosi

La mitosi è un processo di riproduzione cellulare: da una cellula diploide se ne formano due con lo stesso patrimonio cromosomico. Se N_0 rappresenta il numero iniziale delle cellule, l'evoluzione dell'accrescimento cellulare mediante il fenomeno della mitosi il seguente:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 2N_0 \\
N_2 &= 2N_1 = 2(2N_0) = 2^2 N_0 \\
N_3 &= 2N_2 = 2(2^2 N_0) = 2^3 N_0 \\
&\vdots \\
N_k &= 2^k N_0
\end{aligned}
$$

La funzione che rappresenta tale processo è $f(n) = N_0 \cdot 2^n$, dove il dominio $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Crescita malthusiana di una popolazione

Il demografo inglese Malthus (1766 – 1834) introdusse il primo modello di dinamica della popolazione. Esso studia lo sviluppo di una popolazione con risorse illimitate di spazio e cibo.

Nota la popolazione P_0 relativa a un istante iniziale, lo scopo è quello di determinare il valore della popolazione P_t in un generico istante futuro t.

Si suppone che la differenza fra nascite e morti nell'unità di tempo sia costante e uguale a c.

La dinamica della popolazione è rappresentata dalla funzione esponenziale

$$P(t) = P_0 c^t$$

Funzione logistica

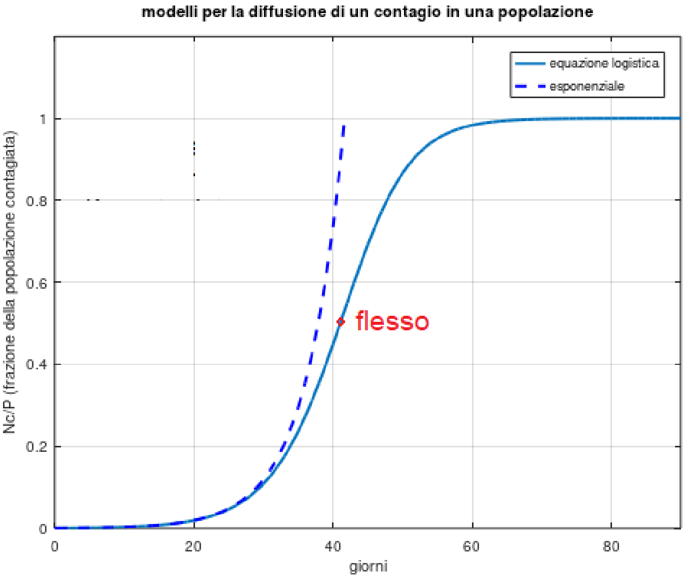
La funzione logistica è stata introdotta da Verhulst nel 1838 e descrive la crescita di una popolazione con risorse limitate[a]

$$N(t) = \frac{P}{1 + \left(\frac{P - N_c}{N_c}\right) e^{-t}}$$

dove N_c è il numero di contagiati all'inizio dell'epidemia, P è la popolazione massima sostenibile (capacità, definita dalle risorse disponibili)

[a] Immagine e approfondimenti: https://aulascienze.scuola.zanichelli.it/come-te-lo-spiego/2020/03/19/la-diffusione-del-contagio-nelle-epidemie-un-modello-matematico/

Funzioni esponenziali in modelli matematici: funzione logistica

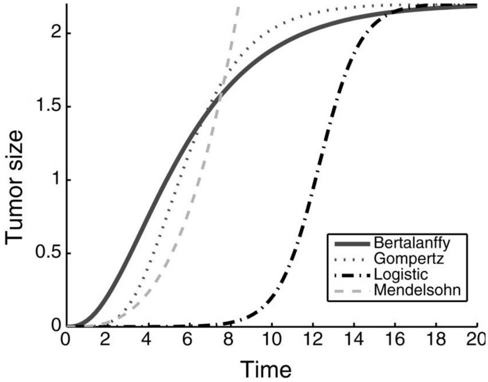


Funzioni esponenziali in modelli matematici: modello di Gompertz

Modello di Gompertz

Il modello di Gompertz descrive la crescita dei tumori nel tempo

$$N(t) = e^{log\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-t}}$$



Funzioni esponenziali in modelli matematici: concentrazione di un farmaco nel sangue

Decadimento esponenziale nella concentrazione di un farmaco nel sangue

La dinamica della concentrazione di un farmaco somministrato per via endovenosa viene studiata attraverso un'equazione differenziale, la cui soluzione è

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

dove C_0 e k sono costanti note e rappresentano, rispettivamente, la concentrazione iniziale del farmaco e il suo decadimento esponenziale.

Metodo del carbonio-14

Tra il 1944 e il 1955 il chimico Libby mise a punto un metodo di datazione dei materiali di origine organica con il carbonio-14. Il C-14 è un isotopo che rimane costante nell'atmosfera e anche in ogni sistema organico vivente. Però, con la morte, cessa il suo assorbimento e il C-14 accumulato diminuisce negli anni seguendo l'andamento della funzione esponenziale

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

dove C_0 e k sono due costanti e rappresentano, rispettivamente, la concentrazione del carbonio-14 nell'atmosfera e il suo decadimento. La conoscenza di tali costanti e del valore $C(t)$ permette a paleontologi e archeologi di datare i fossili o altri ritrovamenti di interesse storico.

Leggenda sulla diffusione degli scacchi nell'antico Egitto

Un ambasciatore persiano si recò in Egitto e fece scoprire al faraone il gioco degli scacchi. Quest'ultimo ne rimase piacevolmente colpito e, per ringraziare l'ambasciatore, decise di esaudire un suo desiderio.
L'ambasciatore chiese solamente del riso: un chicco sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro sulla terza e così via, continuando a moltiplicare ogni volta per due fino alla sessantaquattresima casella. Il faraone, stupito per tale richiesta che a prima vista sembrava modesta, diede ordine al gran tesoriere di esaudirla.
Dopo una settimana di conti, il funzionario informò il faraone che era impossibile soddisfare la richiesta.

Crescita della funzione esponenziale

Leggenda sulla diffusione degli scacchi nell'antico Egitto

Arrivati all'undicesima casella bisognava versare oltre 1000 chicchi di riso, alla ventesima 524.288. All'ultima casella oltre 9 miliardi di miliardi di chicchi, mille volte la produzione annua dell'intero mondo.

Funzione logaritmica

Definizione (Funzione logaritmica)

Si definisce **funzione logaritmica** *la funzione inversa dell'esponenziale*

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Definizione (Logaritmo)

Siano $a, b > 0$, con $a \neq 1$, si definisce **logaritmo** *in* **base** *a di b, e si indica con $\log_a(b)$, l'esponente c al quale si deve elevare la base a per ottenere b. Il numero b è detto* **argomento** *del logaritmo. In simboli:*

$$c = \log_a b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^c = b$$

Esempio

Calcolare il logaritmo $\log_2 8$.

$$\log_2 8 = c \quad \Leftrightarrow \quad 2^c = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3$$

Funzione logaritmica

Le basi dei logaritmi possono essere diverse, le più utilizzate sono: la base 10 e la base e. Il logaritmo in base e viene detto **naturale** e spesso si indica con $\ln(x)$.

Osservazione

$\log_a 1 = 0 \qquad \forall a > 0, a \neq 1$

Osservazione

$\log_a a = 1 \qquad \forall a > 0, a \neq 1$

Osservazione

Poiché $a > 0$, $a^c = b$ è sempre positivo. Di conseguenza l'argomento b del logaritmo dev'essere positivo.

Funzione logaritmica

Caso $a > 1$

- Poiché l'argomento del logaritmo deve essere sempre positivo, il dominio $D = (0, +\infty)$;
- se $x = 1$ allora $y = \log_a(1) = 0$, quindi il grafico passa per il punto $(1, 0)$;
- $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, se $x_1 < x_2$ si ha $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$, quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente crescente.

Funzione logaritmica

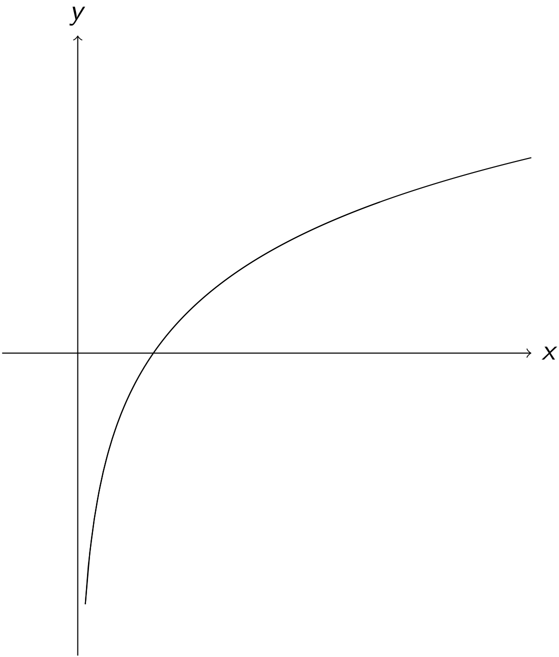
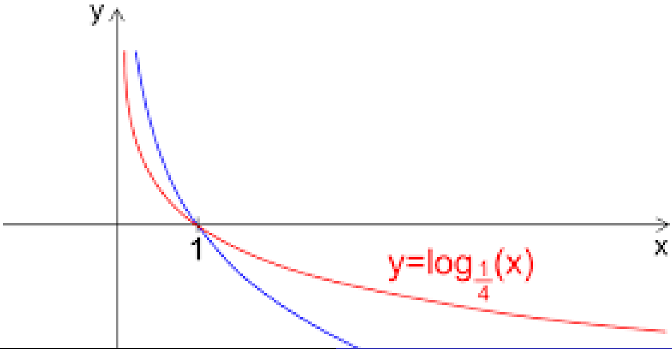


Grafico del logaritmo $y = \log_2(x)$.

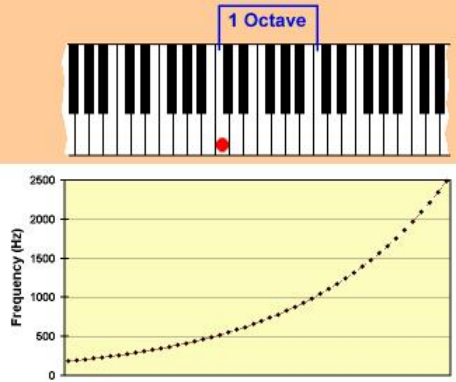
Funzione logaritmica

Caso $0 < a < 1$

- Poiché l'argomento del logaritmo deve essere sempre positivo, il dominio $D = (0, +\infty)$;
- se $x = 1$ allora $y = \log_a(1) = 0$, quindi il grafico passa per il punto $(1, 0)$;
- $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, se $x_1 < x_2$ si ha $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$, quindi $f(x_1) > f(x_2)$. Di conseguenza la funzione è strettamente decrescente.



Funzione logaritmica



Il grafico nota-frequenza è una curva esponenziale. Il grafico frequenza-nota è una curva logaritmica.

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

Consideriamo $f(x) = |x|$.
Ricordiamo che, per definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico di f è dato dai grafici delle due funzioni

$$f_+(x) = x \qquad \text{con } x \geq 0$$
$$f_-(x) = -x \qquad \text{con } x < 0$$

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

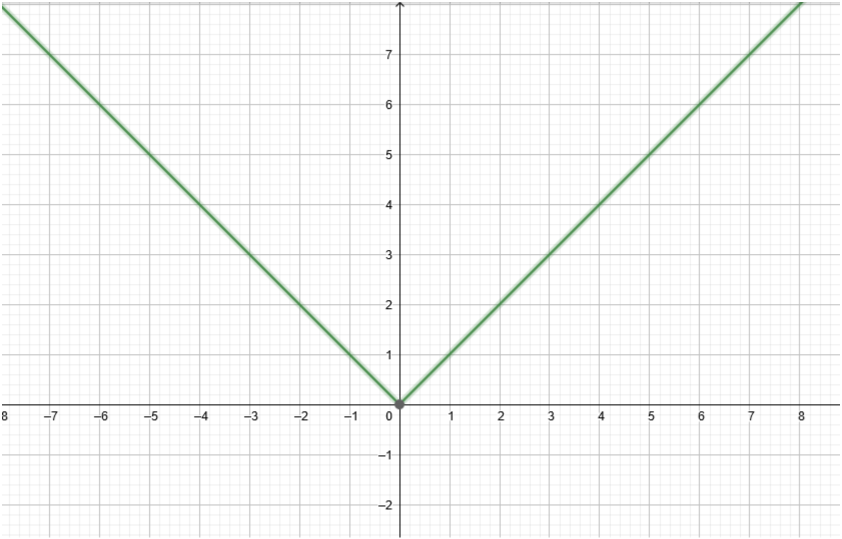


Figura: $y = |x|$

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

Più in generale, data una funzione elementare $y = E(x)$ vogliamo determinare il grafico di $f(x) = |E(x)|$.
Dalla definizione di valore assoluto

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x) & \text{se } E(x) \geq 0 \\ -E(x) & \text{se } E(x) < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il grafico di $f(x) = |E(x)|$ lasciando invariate le parti in cui la funzione è positiva (cioè al di sopra dell'asse x), e ribaltando rispetto all'asse x quelle negative (cioè che si trovano al di sotto dell'asse x).

Funzioni quasi elementari: il valore assoluto di una funzione elementare

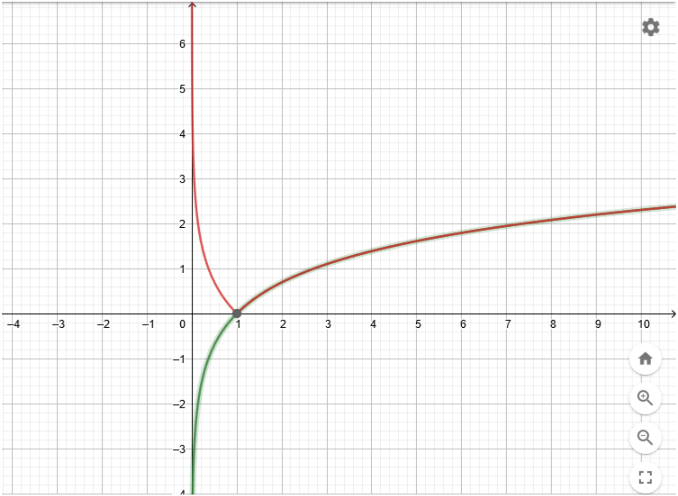


Figura: In verde $y = \log(x)$, in rosso $y = |\log(x)|$. La parte comune alle due funzioni è quella nell'intervallo $[1, +\infty)$

Funzioni quasi elementari: traslazione verticale di una funzione elementare

Sia $y = E(x)$ una funzione elementare. Il grafico della funzione $f(x) = E(x) + k$ si otterrà traslando verticalmente $y = E(x)$ di k unità

- verso l'alto se $k > 0$;
- verso il basso se $k < 0$.

Esempio

La retta $f(x) = x + 2$ si ottiene traslando verticalmente $E(x) = x$ di 2 unità verso l'alto.

Esempio

La funzione $f(x) = e^x - 3$ si ottiene traslando verticalmente $E(x) = e^x$ di 3 unità verso il basso.

Funzioni quasi elementari: traslazione orizzontale di una funzione elementare

Sia $y = E(x)$ una funzione elementare. Il grafico della funzione $f(x) = E(x + k)$ si otterrà traslando orizzontalmente $y = E(x)$ di k unità

- verso sinistra se $k > 0$;
- verso destra se $k < 0$.

Esempio

La retta $f(x) = x + 2$ si ottiene traslando orizzontalmente $E(x) = x$ di 2 unità verso sinistra.

Esempio

La funzione $f(x) = \log(x - 1)$ si ottiene traslando orizzontalmente $E(x) = \log(x)$ di 1 unità verso destra.