Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Limiti

Sonia Cannas

A.A. 2021/2022

Retta ampliata e intorno di un numero reale

Definizione (Retta ampliata)

Si definisce **retta reale ampliata** *(o* **estesa***)*

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Definizione (Intorno)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definisce **intorno** *di x_0 di ampiezza $\epsilon > 0$ l'insieme dei numeri reali x che distano meno di ϵ da x_0, cioè*

$$I_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} | d(x, x_0) < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < \epsilon\}$$

Intorni di un numero reale

Per ogni intorno $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ possiamo distinguere

- l'intorno destro $[x_0, x_0 + \epsilon)$;
- l'intorno sinistro $(x_0 - \epsilon, x_0]$.

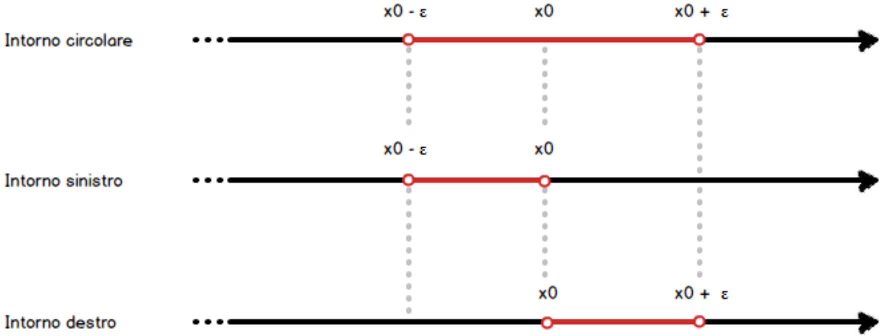


Figura: Intorno di x_0 di raggio ϵ

Intorni e topologia della retta

Definizione (Punto di accumulazione)

Un punto $x \in \mathbb{R}^*$ è **di accumulazione** *per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni suo intorno contiene almeno un punto di A distinto da x.*

Osservazione

I punti di acumulazione dell'intervallo $[a, b]$ sono tutti i punti $x \in \mathbb{R}^*$ t.c. $a \leq x \leq b$. Tali punti sono di accumulazione anche per gli intervalli $(a, b), [a, b), (a, b]$.

Esempio

Consideriamo $A = [-1, 3)$. Sono punti di accumulazione $-1, 3, 0, 2, -\frac{1}{3}, \ldots$. I punti di accumulazione sono tutti quelli che appartengono all'intervallo $[-1, 3]$.

osservazione

Per ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ o (a, ∞), $+\infty$ è un punto di accumulazione. Analogamente, $-\infty$ è un punto di accumulazione per ogni intervallo del tipo $(-\infty, b)$ o $(-\infty, b]$.

Definizione informale di limite

A cosa servono i limiti?

Lo scopo della nozione di **limite** è descrivere rigorosamente il comportamento di una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "vicino" ad un punto di accumulazione del suo dominio A.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per A. Possiamo "far tendere" x a x_0 (in simboli $x \to x_0$) e studiare cosa succede alle immagini $f(x)$.

Definizione informale di limite

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che il limite della funzione f è uguale a L, per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se i valori assunti da f sono vicini quanto si vuole a L in corrispondenza di tutti i punti x sufficientemente vicini a x_0.

Esempio

Consideriamo la funzione elementare $f(x) = e^x$.
Ricordiamo che il dominio $D = (-\infty, +\infty)$.
Osserviamo che

- quando x assume valori via via più piccoli (tendenti a $-\infty$) la funzione si avvicina sempre più alla quota $y = 0$, rimanendone sempre al di sopra, senza mai raggiungerla. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

- quando x assume valori via via più grandi (tendenti a $+\infty$) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a $+\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Definizione informale di limite

Esempio

Consideriamo la funzione elementare $f(x) = \ln(x)$.
Ricordiamo che il dominio $D = (0, +\infty)$.
Osserviamo che

- quando x si avvicina a 0 da destra (tende a 0^+) le ordinate sono negative e diventano sempre più grandi in valore assoluto, ovvero tendono a $-\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

- quando x assume valori via via più grandi (tendenti a $+\infty$) la funzione assume valori sempre più grandi, ovvero tendono a $+\infty$. Matematicamente ciò si esprime scrivendo

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Definizione di limite

Nel caso in cui x_0 e L siano finiti possiamo descrivere i loro intorni come intervalli di ampiezza δ e ϵ rispettivamente.

Definizione (Limite finito di una funzione in un punto)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e $L \in \mathbb{R}$. Diciamo che il limite di f, per $x \to x_0$, è uguale a L, e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Definizione di limite

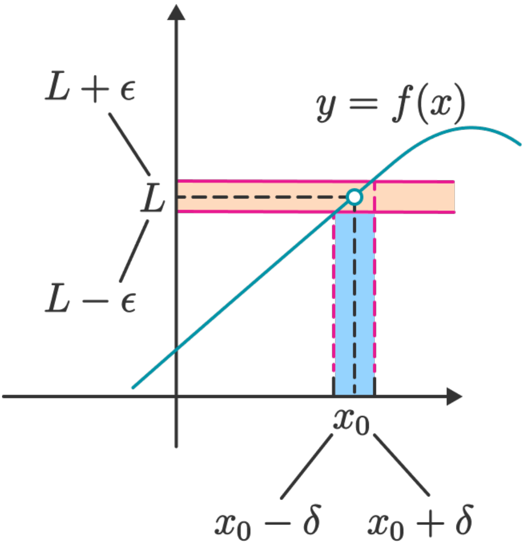


Figura: Definizione di limite con ϵ e δ

Limite destro e limite sinistro

Osservazione

Il punto x_0 è di accumulazione. Di conseguenza x_0 può appartenere o meno al dominio.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Per $x_0 = 2$ abbiamo $\lim_{x->2} f(x) = 1 = f(2)$.
Invece osserviamo che in $x_0 = 0$ il limite non esiste poiché in ogni intorno (δ, δ) di 0 la funzione assume sia il valore -1, sia il valore 1. Tuttavia, nell'intorno sinistro di 0 la funzione assume sempre il valore -1 e nell'intorno destro assume sempre il valore 1. Quindi esistono il limite sinistro e il limite destro.

Osservazione

Una funzione f ammette limite per $x- > x_0$ se e solo se esistono limite sinistro e destro e sono uguali tra loro.

Limite destro e limite sinistro

Siano $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e $L \in \mathbb{R}$.

Definizione (Limite sinistro)

Diciamo che il limite di f che tende a x_0 da sinistra è L, e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *t.c.* $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Definizione (Limite destro)

Diciamo che il limite di f che tende a x_0 da destra è L, e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *t.c.* $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Asintoti verticali e orizzontali

Definizione (Asintoto verticale)

Sia x_0 *un punto di accumulazione per il dominio di una funzione* f. *Se*

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$$

il grafico della funzione ha un **asintoto verticale** *di equazione* $x = x_0$.

Esempio

Il grafico della funzione $f(x) = \ln(x)$ ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Definizione (Asintoto orizzontale)

Sia f una funzione definita in un intorno di $+\infty$ (o $-\infty$). Se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

il grafico della funzione ammette un **asintoto orizzontale** *di equazione $y = L$.*

Esempio

Il grafico della funzione $f(x) = e^x$ ammette un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ poiché

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Operazioni con i limiti

Teorema

Siano $f, g \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni e x_0 un punto di accumulazione per A. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{1}$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è $+\infty$ e l'altro $-\infty$)

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{2}$$

(l'uguaglianza perde significato se uno dei due limiti al secondo membro è ∞ e l'altro 0)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \tag{3}$$

(l'uguaglianza perde significato se i due limiti al secondo membro sono entrambi infiniti o nulli)

Calcolo dei limiti: forme di indeterminazione

Per il teorema sulle operazioni con i limiti abbiamo visto che se la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite, per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$, è elementare o è somma/prodotto/quoziente di funzioni elementari, il limite si calcola con una semplice sostituzione.

Il calcolo dei limiti può portare alle seguenti 7 **forme di indeterminazione** o **indecisione**:

1. $+\infty - \infty$ (o $-\infty + \infty$);
2. $0 \cdot \infty$;
3. $\dfrac{\infty}{\infty}$;
4. $\dfrac{0}{0}$;
5. 1^{∞};
6. 0^0;
7. ∞^0.

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^5-4x)=\infty-\infty=?$$

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=-\infty\cdot 0=?$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1-x^2}=\frac{+\infty}{-\infty}=?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1}=\frac{0}{0}=?$$

Attenzione

La forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$ indica un limite in cui numeratore e denominatore **tendono** a 0, non che essi assumono il valore 0. Quindi

$$\lim_{x \to 1} \frac{5^0 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{0}{x - 1}$$

non è una forma indeterminata, poiché

$$\frac{0}{x - 1} = 0$$

prima ancora di calcolarne il limite.

Attenzione

Analogamente, la forma di indeterminazione 1^∞ indica il limite di una potenza la cui base **tende** a 1 e l'esponente ad infinito. Quindi è una forma di indeterminazione del tipo 1^∞ il limite seguente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ma non lo è

$$\lim_{x\to\infty} 1^x$$

poiché

$$1^x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Calcolo dei limiti: funzioni polinomiali

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^5-4x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^5\left(1-\frac{4x}{3x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3x^5\left(1-\frac{4}{3x^5}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty$$

Osservazione

Sia $P(x)$ un polinomio. In generale, per calcolare il $\lim_{x\to\infty} P(x)$ è sufficiente calcolare il limite del termine di grado massimo, gli altri termini sono trascurabili.

Le funzioni $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x$ sono entrambe *infinite*.

Definizione (Funzione infinita)

Una funzione f si dice **infinita** *per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Le funzioni infinite possono essere infiniti di ordine diverso.

Ordini di infinito

Definizione

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to \infty$. Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tale limite è uguale a

- 0 *diremo che f è infinito di ordine inferiore rispetto a g;*
- $k \neq 0$ *diremo che f e g sono infiniti dello stesso ordine;*
- ∞ *diremo che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g;*
- $\nexists$, *in tal caso i due infiniti non sono confrontabili.*

Ordini di infinito delle funzioni polinomiali

Sia $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi di grado rispettivamente h e k. Se $h > k$ allora $P(X)$ è una funzione infinita di ordine superiore rispetto a $Q(x)$.

Siano $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ due polinomi.
Nel calcolo dei limiti di queste funzioni possiamo trovare due forme di indeterminazione.

$\frac{\infty}{\infty}$ nel calcolo di limiti per $x \to \infty$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^8+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{x^8\left(1+\frac{1}{x^8}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^8} = 0$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2}{3-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^4}\right)}{-2x^4\left(\frac{3}{-2x^4}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{-2x^4} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$ nel calcolo di limiti per $x \to x_0$

Se si verifica la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ significa che $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, quindi entrambi i polinomi sono divisibili per $(x - x_0)$. L'indeterminazione si può rimuovere scomponendo i due polinomi in fattori e semplificando la frazione.

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Calcolo dei limiti: gerarchie degli infiniti

Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$ *con* F *infinito di ordine superiore rispetto a* f *per* $x \to x_0$;
- $y = g(x) + G(x)$ *con* G *infinito di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad \text{(forma indeterminata)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Calcolo dei limiti: gerarchie degli infiniti

La funzione esponenziale di base $a > 1$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi funzione potenza con esponente $b > 0$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2021x^{100}} = +\infty$$

Qualsiasi funzione funzione potenza con esponente $b > 0$ è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza con esponente $c > 0$ della funzione logaritmica di base $a > 1$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\log_a x)^c} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{589 \log^{100}(x)} = +\infty$$

Ordini di infinitesimi

Definizione (Funzione infinitesima)

Una funzione f si dice **infinitesima** *per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Come per le funzioni infinite, esistono infinitesimi di diverso ordine.

Ordine di infinitesimo delle funzioni polinomiali

Per le funzioni polinomiali, se si assume $g(x) = x$ come infinitesimo campione, l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ è dato dal termine di grado minimo.

Ordini di infinitesimi

Definizione

Siano f e g due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Per confrontarle studiamo il limite del loro rapporto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tale limite è uguale a

- 0 *diremo che f è infinitesima di ordine superiore rispetto a g;*
- $k \neq 0$ *diremo che f e g sono infinitesime dello stesso ordine;*
- ∞ *diremo che f è infinitesima di ordine inferiore rispetto a g;*
- $\nexists$, *in tal caso i due infinitesimi non sono confrontabili.*

Teorema

Consideriamo le seguenti funzioni

- $y = f(x) + F(x)$ *con* F *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* f *per* $x \to x_0$*;*
- $y = g(x) + G(x)$ *con* G *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$*.*

Se i limiti indicati esistono vale la seguente uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Asintoti obliqui

Teorema

Il grafico di una funzione f ammette la retta $y = mx + q$ quale asintoto obliquo se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$
3. $$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

Asintoti obliqui

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{x+2} = -1$$

Quindi la funzione $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ per $x \to +\infty$ possiede come asintoto obliquo la retta $y = x - 1$.

Asintoti obliqui

Esempio

La funzione $y = \ln(x)$ non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Esempio

La funzione $y = e^x$ non ammette asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Definizione (Funzione continua)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A \cap A'$ (cioè x_0 è un punto di accumulazione che appartiene al dominio A). Diremo che f è **continua** *in x_0 quando*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero quando

$$\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c.\ \ se \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ allora \quad f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \end{array}$$

Quindi f è continua in x_0 se è definita in x_0 e se $\lim_{x->x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funzioni continue

Esempi di funzioni continue

- le funzioni costanti;
- le funzioni lineari;
- le funzioni potenza $y = x^n$
- le funzioni esponenziali $y = a^x$;
- le funzioni logaritmiche $y = \log_a(x)$
- le funzioni trigonometriche $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$.

Condizione necessaria e sufficiente per funzioni continue

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in un punto x_0 se e solo se il limite sinistro e destro per $x \to x_0$ esistono e sono uguali a $f(x_0)$, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Discontinuità

Discontinuità

Una funzione si dice **discontinua** se non è continua.

Discontinuità eliminabile

x_0 è una discontinuità eliminabile quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale discontinuità è eliminabile poiché il limite destro e sinistro per $x \to 0$ esistono e sono uguali a 0, ma in $x = 0$ la funzione assume il valore $f(0) = 1$, quindi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

Discontinuità

Discontinuità di prima specie

x_0 è una discontinuità di prima specie se il limite sinistro e destro per $x \to x_0$ esistono finiti, ma sono diversi fra loro, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = c \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = d \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad c \neq d$$

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$. Infatti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Discontinuità

Discontinuità di seconda specie

x_0 è una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) per $x \to x_0$ non esiste o esiste infinito

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ è una discontinuità di seconda specie, infatti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Massimi e minimi

Definizione (Massimo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce **massimo** *di A un numero $M \in A$ tale che*

$$M \geq a \qquad \forall a \in A$$

Definizione (Minimo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce **minimo** *di A un numero $m \in A$ tale che*

$$m \leq a \qquad \forall a \in A$$

Esempio

Sia $A = [1, 4]$. Il massimo e il minimo di A sono rispettivamente

$$M = 4 \qquad m = 1$$

Osservazione

Non sempre esistono il massimo e il minimo.
Controesempio: l'intervallo $(1, 4)$ non ammette né massimo né minimo.

Massimi e minimi di una funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$ e I_{x_0} un intorno di x_0.

Definizione (Massimo locale)

Diremo che x_0 è un punto di **massimo locale** *(o relativo) se*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Esempio

La parabola $y = -x^2$ ha un massimo locale in $x = 0$.

Definizione (Minimo locale)

Diremo che x_0 è un punto di **minimo locale** *(o relativo) se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Definizione (Massimo globale)

Diremo che x_0 *è un punto di* **massimo globale** *(o assoluto) se*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Esempio

La parabola $y = -x^2$ ha un massimo globale in $x = 0$.

Definizione (Minimo globale)

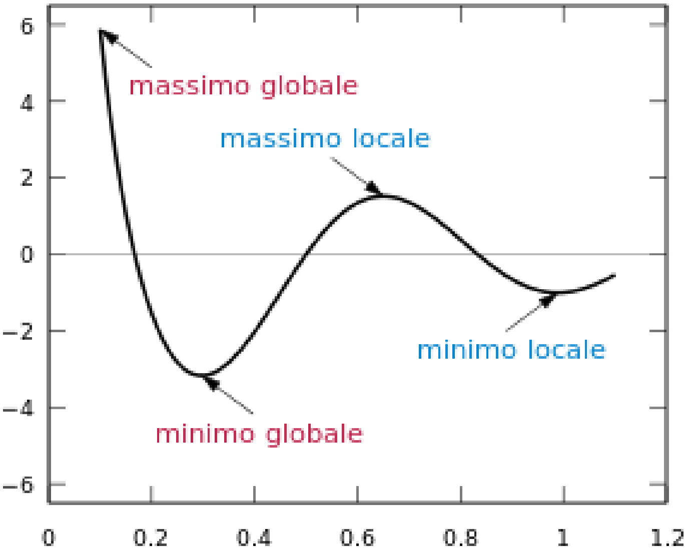
Diremo che x_0 *è un punto di* **minimo globale** *(o assoluto) se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Esempio

La funzione $y = |x^2 - 1|$ ammette due minimi globali per $x = -1$ e $x = 1$ e un massimo locale per $x = 1$. Non ci sono massimi globali.

Massimi e minimi di una funzione



Teorema di Weierstrass

Teorema (di Weierstrass)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *ammette massimo e minimo assoluti in* $[a, b]$[a].

[a] Gli intervalli con gli estremi inclusi sono chiusi e limitati.

Esempio

La retta $y = 2x$ è una funzione continua. Se restringiamo il suo dominio ad un intervallo chiuso e limitato, ad esempio $[1, 3]$, sono soddisfatte le ipotesi del teorema. Di conseguenza vale la tesi, infatti essa ammette un minimo globale in $x = 1$ ($y = 2$ è il valore minimo assunto dalla funzione in $[1, 3]$) e un massimo globale in $x = 3$ ($y = 6$ è il valore minimo assunto dalla funzione in $[1, 3]$).

Teorema degli zeri

Teorema (degli zeri)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua con* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Allora esiste un punto* $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$.

Metodo di bisezione

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, quindi esiste un punto $c \in [a, b]$ che interseca l'asse x. Se non è possibile determinare tale punto c per via algebrica si può utilizzare il **metodo di bisezione**.

Metodo di bisezione

1. Sia $c = \dfrac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato il punto d'intersezione tra f e l'asse x. Se $f(c) \neq 0$ si va avanti.
2. Si individua in quale fra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ la funzione f ammette valori discordi e si ripete il procedimento del passo precedente utilizzando il nuovo intervallo individuato.
3. Si itera il procedimento finché non si giunge ad un intervallo che consente di approssimare lo zero con la precisione voluta.

Metodo di bisezione

Esempio

La funzione $f(x) = 2^x + x$ nell'intervallo $[-1, 0]$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri poiché

- $[-1, 0]$ è un intervallo chiuso e limitato;
- $f(x)$ è continua in $[-1, 0]$;
- $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ e $f(0) = 1 > 0$;

quindi esisterà un punto $c \in [-1, 0]$ t.c. $f(c) = 0$. Per determinarlo dovremmo risolvere l'equazione $2^x + x = 0$, ma essa non è risolubile per via algebrica. Possiamo localizzare la soluzione dell'equazione utilizzando il metodo di bisezione.

Metodo di bisezione

- Sia $c = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Poiché $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,21 \neq 0$ andiamo avanti.
- Poiché $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0,21 > 0$ iteriamo il ragionamento sull'intervallo $[-1, -\frac{1}{2}]$.
- Sia $c = \dfrac{-1-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{3}{4}$. Poiché $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) \simeq -0,16 < 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}\right]$.
- Sia $c = \dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{5}{8}$. Poiché $f\left(-\dfrac{5}{8}\right) \simeq 0,02 > 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{5}{8}, -\dfrac{3}{4}\right]$.
- Sia $c = \dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{5}{8}}{2} = -\dfrac{11}{16}$. Poiché $f\left(-\dfrac{11}{16}\right) \simeq -0,07 < 0$ la soluzione sarà nell'intervallo $\left[-\dfrac{11}{16}, -\dfrac{5}{8}\right]$.