Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

Matematica
Integrali

Sonia Cannas

A.A. 2021/2022

Introduzione al calcolo integrale

Problemi con l'operazione inversa della derivazione

Quando nei modelli dinamici si cerca l'andamento temporale di una grandezza variabile di cui è noto il tasso istantaneo di variazione si ricorre all'operazione inversa della derivazione.

Esempio

Supponiamo di conoscere la velocità $v(t)$ con cui si muove un oggetto e di voler determinare la legge oraria del moto $s = s(t)$. Poiché

$$v(t) = s'(t)$$

dobbiamo determinare una funzione $s(t)$ la cui derivata sia $v(t)$.

Problema

In generale, data una funzione f, esiste ed è possibile determinare una funzione la cui derivata sia f?

Definizione (Primitiva)

Una funzione F si dice **primitiva** *di una funzione f in un intervallo I se è derivabile in I e se la la sua derivata coincide con f per ogni $x \in I$, cioè*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I \tag{1}$$

Esempio

La funzione $F(x) = x^3$ è una primitiva di $f(x) = 3x^2$ in $I = \mathbb{R}$. Infatti $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Esempio

La funzione $F(x) = \log(x)$ è una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $I = (0, +\infty)$. Infatti $F'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$.

Osservazione

La primitiva di una funzione non è unica. Le primitive sono infinite.

Esempio

La funzione $F(x) = x^3$ è una primitiva di $f(x) = 3x^2$, ma sono primitive di f anche $G(x) = x^3 + 1$, $H(x) = x^3 + 2$, $\dots$, poiché la derivata di una costante è nulla. In generale tutte le funzioni della forma $x^3 + c$, con $c \in \mathbb{R}$, sono primitive di f. Le primitive sono quindi infinite.

L'integrale indefinito

L'operazione che associa ad ogni funzione derivabile la sua derivata si chiama *derivazione*. Il procedimento inverso, che consiste nel determinare, se esistono, tutte le infinite primitive di una data funzione si chiama *integrazione*.

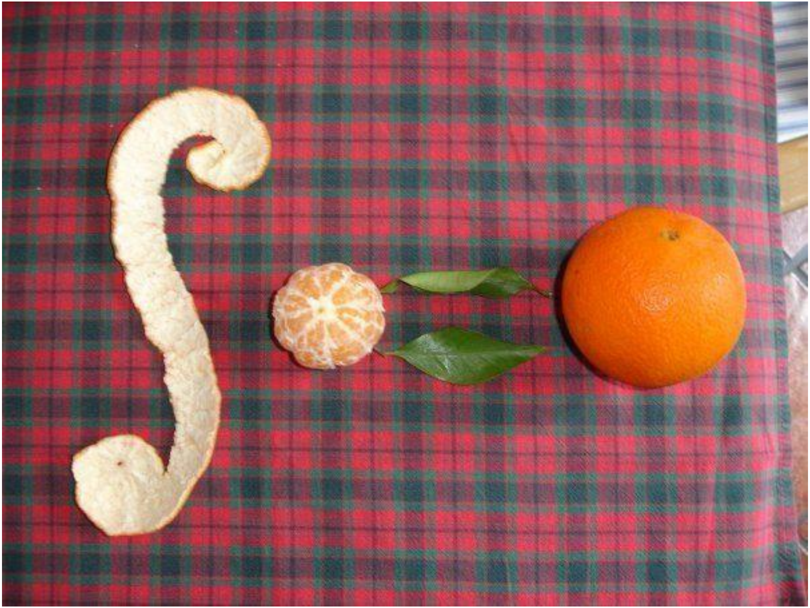
Definizione (Integrale indefinito)

Si definisce **integrale indefinito** *di una funzione f l'insieme di tutte le primitive di f e si indica con*

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

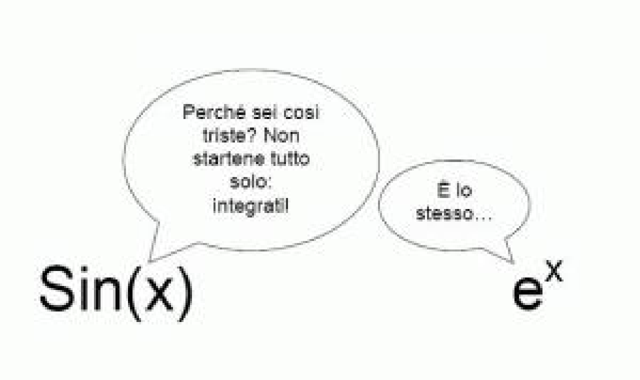
L'integrale indefinito

L'integrale indefinito



Integrali indefiniti immediati

$$\int e^x dx = e^x + c$$



$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$$

Integrali indefiniti immediati

Esempio

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Esempio

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Esempio

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Linearità dell'integrale

Linearità dell'integrale

Gli integrali godono delle seguenti importanti proprietà:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx \qquad k \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{4}$$

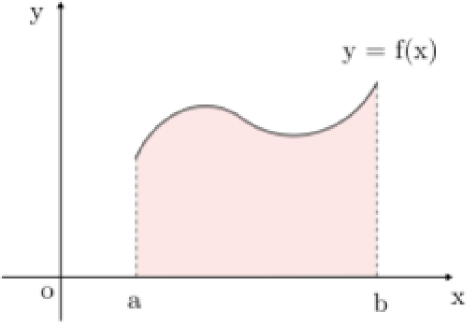
Esempio

$$\int \left(4x^2 - \frac{5}{x} + 7e^x\right) dx = 4 \int x^2 dx - 5 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int e^x dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \log |x| + 7e^x + c$$

Problema

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. È possibile determinare l'area della regione delimitata dal grafico di f e dall'asse x?



Integrale definito

Area sottesa da una retta orizzontale

Se la funzione è una retta orizzontale $y = k$ il problema è facilmente risolvibile: bisognerebbe calcolare l'area di un rettangolo di base $b - a$ e di altezza k, quindi

$$A = (b - a) \cdot k$$

Strategia generale

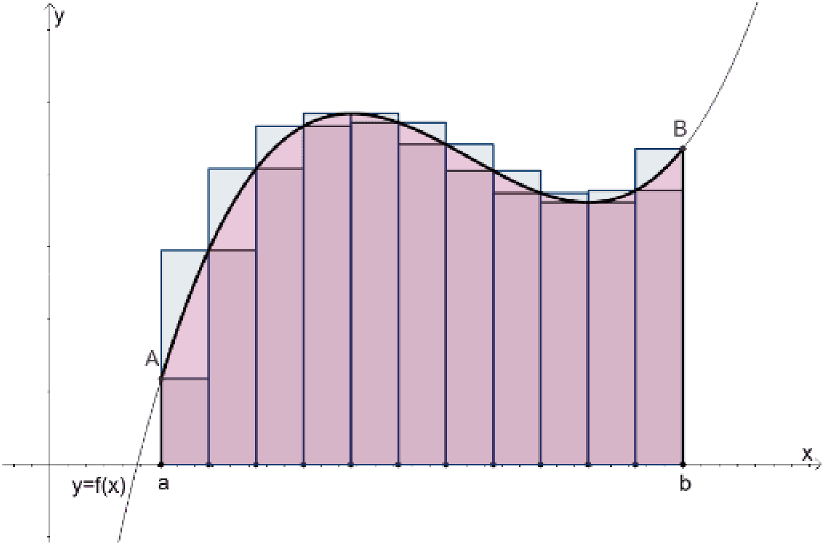
Se la funzione è più complessa, in particolare se non ha tratti rettilinei, non è possibile sfruttare il calcolo dell'area di una figura geometrica nota. Possiamo però suddividere e approssimare l'area sottesa dalla funzione f con figure geometriche di cui è semplice calcolare l'area, ad esempio con rettangoli.

Costruzione dell'integrale definito

1. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in più intervalli mediante i punti di suddivisione x_i t.c. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$;
2. in ciascun intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo due rettangoli di base $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, uno di altezza L_i che approssima l'area sottesa da f in $[x_{i-1}, x_i]$ per eccesso, l'altro di altezza l_i che approssima l'area sottesa da f per difetto;
3. le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da f per eccesso saranno date da $L_i \cdot \Delta x_i$, quelle dei rettangoli che approssimano f per difetto da $l_i \cdot \Delta x_i$;
4. definiamo **somma superiore** e **somma inferiore** le aree ottenute sommando le aree dei rettangoli che approssimano l'area sottesa da f per eccesso e per difetto rispettivamente, cioè

$$S = \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot \Delta x_i \qquad s = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i$$

Integrale definito



Integrale definito

Costruzione dell'integrale definito

È possibile dimostrare che, per ogni suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ nei punti x_i,la somma inferiore è sempre minore della somma superiore, cioè

$$s \leq S$$

Al variare della suddivisione di $[a, b]$ variano anche S e s, ma vale sempre la relazione di disuguaglianza di sopra. In particolare, fra tutte le somme inferiori consideriamo quella maggiore di tutte, cioè $\sup s$. Similmente, fra tutte le possibile somme superiori consideriamo quella minore, cioè $\inf S$. Poiché la disuguaglianza di sopra vale per qualsiasi suddivisione, allora

$$\sup s \leq \inf S$$

Integrale definito

Definizione (Integrale definito)

Si definisce **integrale definito** *di una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *il numero* $\sup s = \inf S$ *e si denota con*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Significato geometrico dell'integrale definito

L'integrale definito è un numero che rappresenta l'area delimitata da una funzione f e dall'asse x in un intervallo $[a, b]$.

Integrale definito

Per il calcolo degli integrali definiti si può sfruttare il seguente teorema.

Teorema (Fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* $F(x)$ *una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{5}$$

Esempio

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Integrale definito

Esempio

$$\int_1^2 3e^x dx = 3\int_1^2 e^x dx = 3\left[e^x\right]_1^2 = 3[e^2 - e^1] = 3e^2 - 3e$$

Esempio

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \left(\frac{7}{x+1} + 4x^3\right) dx &= \left[7\log|x+1| + x^4\right]_3^4 = \\
&= 7\log|4+1| + 4^4 - \left(7\log|3+1| + 3^4\right) = \\
&= 7\log(5) + 256 - 7\log(4) - 81 = \\
&= \log(5^7) - \log(4^7) + 175 = \\
&= \log\left(\frac{5^7}{4^7}\right) + 175 = \\
&= \log\left(\frac{5}{4}\right)^7 + 175 \simeq 176,562
\end{aligned}$$