



Università di Cagliari
Corso di Laurea in Farmacia

MATEMATICA STATISTICA

Sonia Cannas

A.A. 2021/2022

Statistica

La **statistica** è una disciplina il cui fine è lo studio quantitativo di fenomeni collettivi (ossia riguardanti più individui) osservabili nella realtà sociale, in natura o in laboratorio per fini descrittivi o per prendere delle decisioni.

Popolazione

Per **popolazione** si intende l'insieme degli elementi oggetto di un'indagine statistica. Ciascun elemento facente parte della popolazione è detto anche **unità statistica**. Le popolazioni possono essere umane, animali, collezioni di batteri, abbigliamento, ecc...

In alcune indagini statistiche non è possibile esaminare un'intera popolazione, quindi se ne estrae un campione.

Campione

Per **campione** si intende un insieme finito di n unità che si può ritenere rappresentativo di un'intera popolazione.

Statistica descrittiva

La **statistica descrittiva** è quella parte della statistica che si occupa di descrivere e sintetizzare i dati raccolti in un esperimento/studio attraverso i suoi strumenti grafici e i suoi indici.

Indagine statistica

Un'indagine statistica si articola nelle seguenti fasi:

- 1 pianificazione dell'indagine;
- 2 rilevazione dei dati;
- 3 elaborazione dei dati;
- 4 presentazione e interpretazione dei risultati.

Ci occuperemo prevalentemente della fase di elaborazione dei dati.

Carattere (o variabile)

La caratteristica oggetto di studio in un'indagine statistica è detta **carattere** o **variabile**.

Esempi di caratteri in un'indagine statistica

Colore degli occhi, misura dell'altezza, misura del peso, l'età degli individui di una popolazione.

Modalità

Ciascuna delle varianti con cui un carattere può presentarsi è detta **modalità**.

Esempi di modalità di caratteri in un'indagine statistica

Il carattere "colore degli occhi" può assumere le modalità: verdi, azzurri, marroni, ecc...

Il carattere "misura dell'altezza" può assumere le modalità: 170 cm, 157 cm, 186 cm, ecc...

Le modalità osservate sono dette **dati**.

Caratteri quantitativi e qualitativi

Un carattere le cui modalità sono espresse da numeri è detto **quantitativo**, in caso contrario è detto **qualitativo**.

Esempi di caratteri quantitativi

Misura dell'altezza, misura del peso, l'età degli individui di una popolazione, presenza di malattie cardiovascolari, ecc...

Esempi di caratteri qualitativi

Colore degli occhi, tipo di alimentazione, genere, credo religioso, ecc...

Caratteri quantitativi discreti e continui

Un carattere quantitativo è detto **discreto** se può assumere una quantità di valori finita oppure numerabile (cioè può essere posto in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}); si dice **continuo** se può assumere una quantità continua di valori, cioè se può assumere tutti i valori reali di un determinato intervallo.

Esempio

Indagine	Popolazione	Carattere	Modalità	Tipo carattere
Colore degli occhi dei sardi	Tutti i sardi	Colore degli occhi	Marroni, verdi, ecc...	Qualitativo
Peso degli studenti universitari	Tutti gli studenti universitari	Misura del peso	50 kg, 51 kg, ...	Quantitativo continuo
Anno di nascita delle matricole di unica	Matricole di unica	Anno di nascita	2000, 1999, 1998, ...	Quantitativo discreto

Definizione (Frequenza assoluta)

Si definisce **frequenza assoluta** (o semplicemente **frequenza**) il numero di volte in cui si verifica un evento o una modalità è stata osservata.

Esempio

Supponiamo di voler studiare l'evoluzione genetica del colore degli occhi di una determinata popolazione. Nell'indagine sono stati rilevati i colori degli occhi di una generazione il cui campione è formato da 180 individui, le cui frequenze dei colori sono sintetizzate nella seguente tabella.

Colore occhi	Numero individui
Nero	70
Marrone	50
Verde	40
Azzurro	20
Totale	180

Funzione distribuzione delle frequenze

Ad ogni modalità di un carattere possiamo associare la rispettiva frequenza. Tale relazione è detta **funzione di distribuzione delle frequenze** e solitamente si rappresenta tramite una tabella con due colonne, dove la prima rappresenta le modalità e la seconda le relative frequenze (vedi tabella dell'esempio precedente).

Osservazione

Se il carattere oggetto di studio presenta modalità con frequenza molto bassa la funzione di distribuzione delle frequenze non determinerebbe una sintesi significativa. Il problema può essere superato accorpendo alcune modalità in **classi**.

Esempio

Supponiamo di voler analizzare la statura dei 18 atleti di una squadra di calcio e che i dati siano i seguenti.

Atleta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altezza	173	164	174	180	182	176	184	185	170
Atleta	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Altezza	172	186	167	188	183	168	176	184	178

Le modalità hanno frequenza 1 o al massimo 2. Conviene analizzare la distribuzione di frequenze delle classi.

Possiamo suddividere le possibili altezze negli intervalli:

$(160, 165]$ $(165, 170]$ $(170, 175]$ $(175, 180]$ $(180, 185]$ $(185, 190]$

e costruire la seguente tabella di distribuzione di frequenze delle classi

Altezza atleti	Numero atleti
$(160, 165]$	1
$(165, 170]$	3
$(170, 175]$	3
$(175, 180]$	4
$(180, 185]$	5
$(185, 190]$	2

Definizione (Frequenza relativa)

Si definisce **frequenza relativa** di una modalità il rapporto tra la sua frequenza assoluta e il numero complessivo di individui oggetto di studio.

Osservazione

Le frequenze relative possono essere espresse sotto forma di percentuali: in tal caso si parla di **frequenza percentuale**.

Esempio

Consideriamo nuovamente lo studio sull'evoluzione genetica del colore degli occhi di una determinata popolazione e riportiamo in tabella anche le frequenze relative e quelle percentuali.

Colore occhi	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
Nero	70	$\frac{70}{180} \approx 0,389$	38,9%
Marrone	50	$\frac{50}{180} \approx 0,278$	27,8%
Verde	40	$\frac{40}{180} \approx 0,222$	22,2%
Azzurro	20	$\frac{20}{180} \approx 0,111$	11,1%
Totale	180	$\frac{180}{180} = 1$	100%

Osservazione

La somma delle frequenze assolute è uguale al numero complessivo di individui. La somma delle frequenze relative è uguale a 1. La somma delle frequenze percentuali è uguale al 100%.

La funzione di distribuzione delle frequenze, come ogni funzione, può essere rappresentata graficamente. In generale in statistica vengono utilizzati vari grafici. I più importanti possono essere ricondotti a quattro categorie.

Principali rappresentazioni grafiche

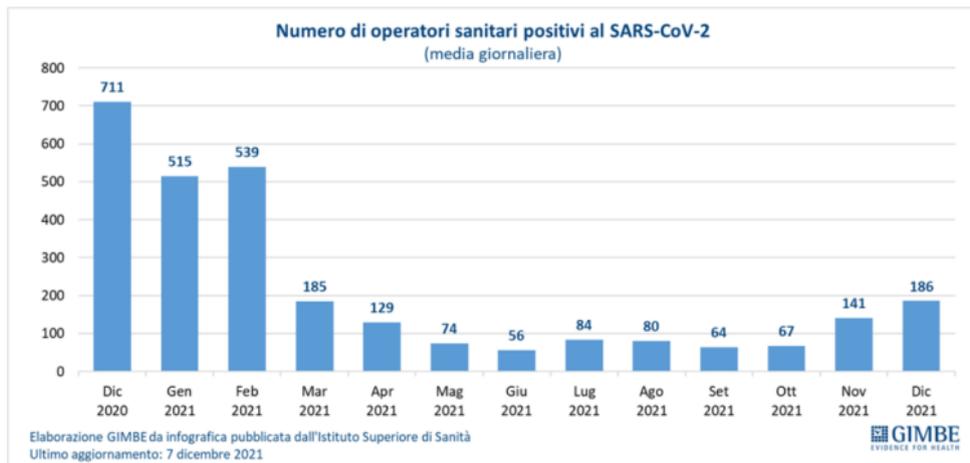
- **Diagramma a barre:** viene utilizzato prevalentemente per caratteri qualitativi o quantitativi discreti.
- **Istogramma:** viene utilizzato prevalentemente per caratteri suddivisi in classi, in particolare caratteri quantitativi continui.
- **Diagramma circolare:** viene utilizzato prevalentemente per caratteri qualitativi, quando si vuole visualizzare la distribuzione del carattere.
- **Diagramma cartesiano:** viene utilizzato prevalentemente per rappresentare fenomeni osservati in determinati periodi di tempo (serie temporali).

Rappresentazioni grafiche dei dati

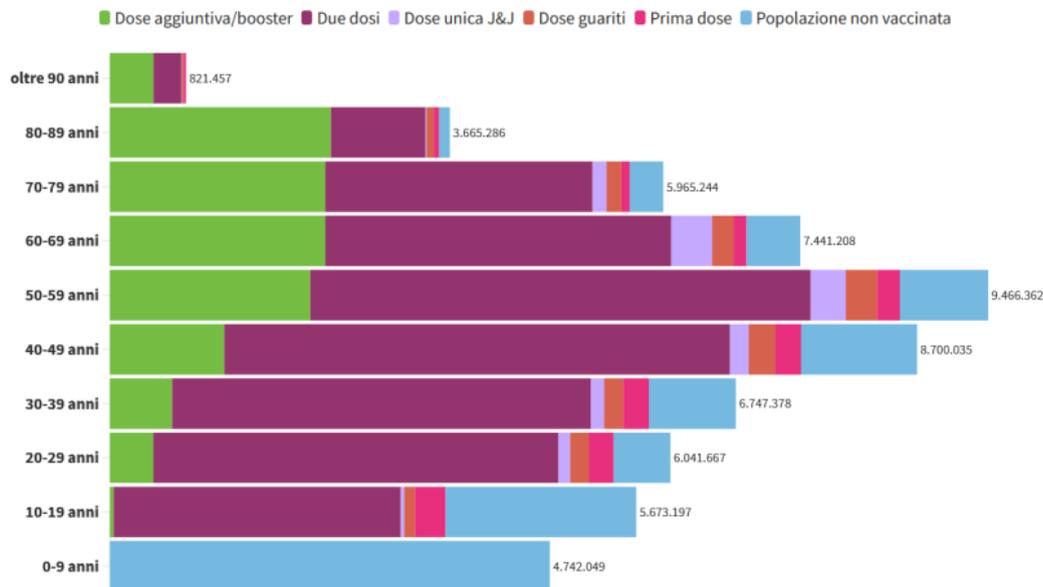
Diagramma a barre

Rappresenta la funzione di distribuzione delle frequenze tramite rettangoli distanziati tra loro, aventi la stessa base e altezza proporzionale alla frequenza della modalità osservata.

Il grafico illustra, per mese, la media giornaliera di nuovi casi di infezione da SARS-CoV-2 tra gli operatori sanitari in Italia.



Rappresentazioni grafiche dei dati



Fonte dati: Open Data su consegna e somministrazione dei vaccini anti COVID-19 in Italia - Commissario straordinario per l'emergenza Covid-19/ISTAT.
Infografica a cura di Paolo Spada

Figura: Somministrazione vaccini per classi di età in Italia al 14/12/2021

Rappresentazioni grafiche dei dati

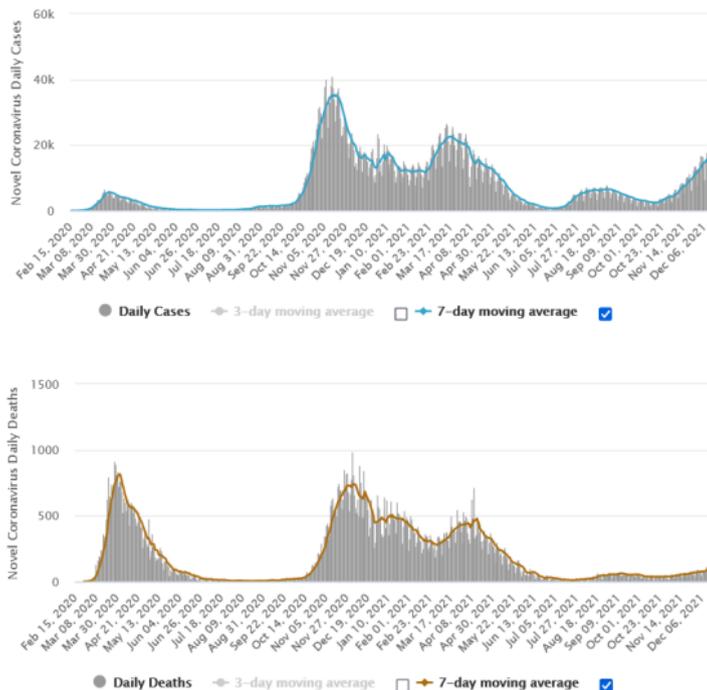


Figura: Nuovi casi e decessi giornalieri in Italia fino al 14/12/2021. Fonte: <https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/>

Rappresentazioni grafiche dei dati

Istogramma

È un grafico rappresentato da rettangoli non distanziati, ciascuno dei quali ha un'area proporzionale alla frequenza della classe rappresentata. Se le classi hanno la stessa ampiezza i rettangoli hanno tutti la stessa base e altezza uguale alla misura della frequenza.

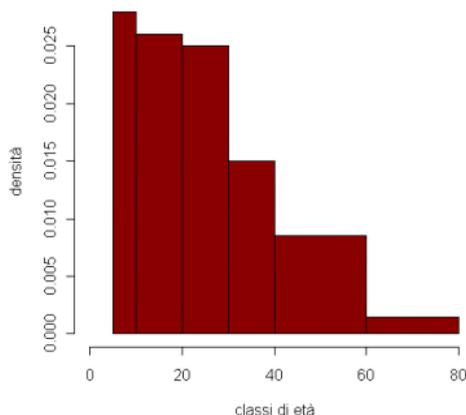


Figura: Istogramma consumatori di nutella per classi di età

Rappresentazioni grafiche dei dati

Gli istogrammi e i diagrammi a barre possono risultare utili anche nel confronto tra due o più insiemi di dati.

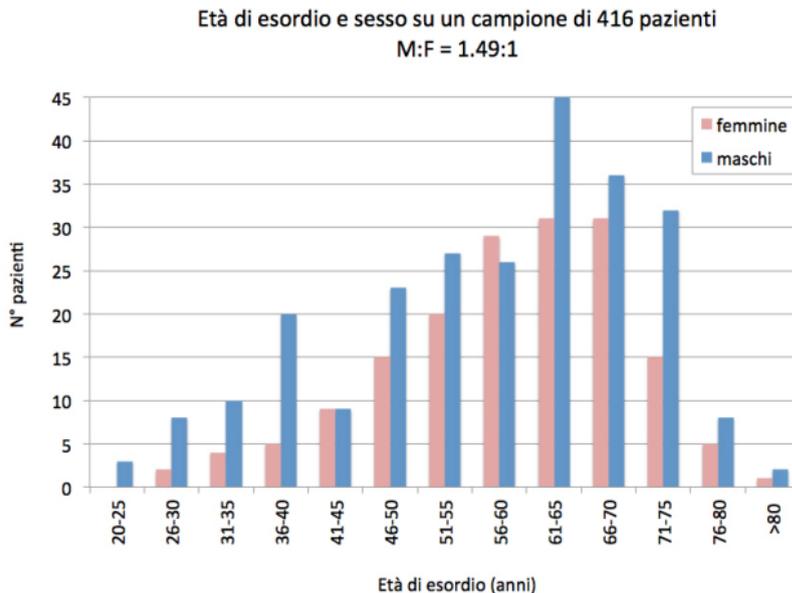
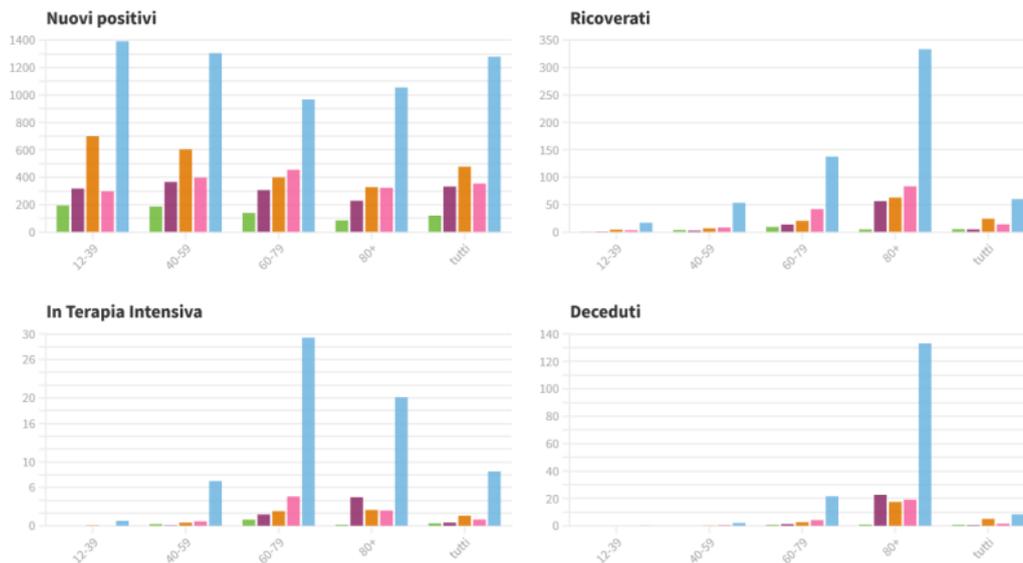


Figura: Confronto pazienti con SLA

Rappresentazioni grafiche dei dati

■ Vaccinati con ciclo completo + dose aggiuntiva/booster ■ vaccinati con ciclo completo da meno di 5 mesi ■ vaccinati con ciclo completo da più di 5 mesi ■ vaccinati con ciclo incompleto ■ non vaccinati



Fonte dati: ISS. Infografica: Paolo Spada

Figura: Confronto positivi, ricoverati e deceduti fra vaccinati e non vaccinati. Dati del 10/12/2021

Diagramma circolare (o a torta)

Rappresentano la funzione di distribuzione delle frequenze attraverso settori circolari di ampiezza proporzionale alla frequenza.

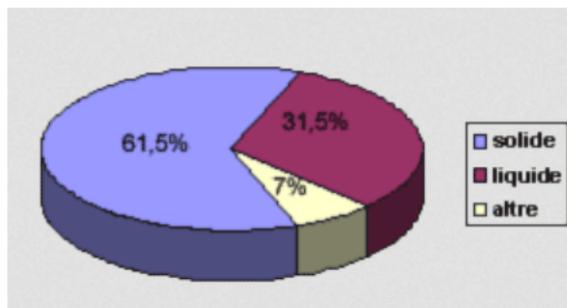
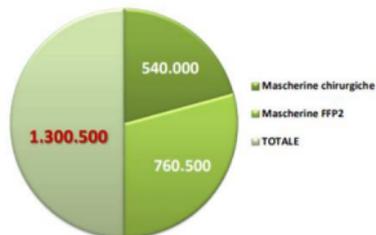


Figura: Diagramma a torta dei prodotti farmaceutici commercializzati nel 2000

Rappresentazioni grafiche dei dati

DETTAGLIO DPI FORNITI AL SERVIZIO SANITARIO REGIONALE

Mascherine fornite dalla RAS



DETTAGLIO DPI FORNITI A UFFICI GIUDIZIARI, PREFETTURE, FORZE DELL'ORDINE, ALTRI

DPI forniti dal DPC

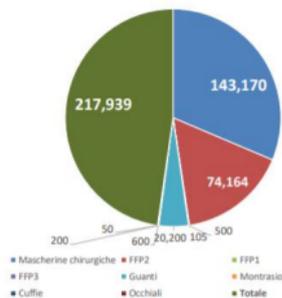
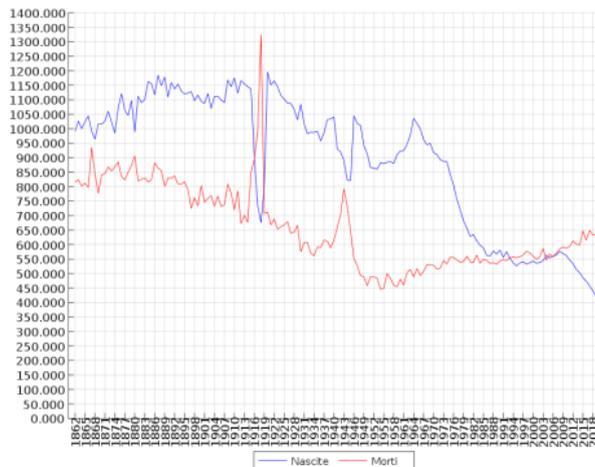


Figura: Diagrammi a torta sbagliati

Rappresentazioni grafiche dei dati

Diagramma cartesiano

L'asse delle ascisse rappresenta i tempi, quello delle ordinate i valori osservati corrispondenti a ciascun evento temporale. I punti ottenuti vengono uniti da segmenti in modo da formare una poligonale che rappresenta, con buona approssimazione, l'andamento del fenomeno nel tempo.



Indici di posizione

Gli **indici di posizione**, detti anche **misure di tendenza centrale**, consentono di sintetizzare una distribuzione di dati attorno ad un loro valore ritenuto centrale. Ci sono diversi modi per esprimere un valore centrale dei dati a disposizione. Analizzeremo i seguenti indici di posizione:

- la media;
- la mediana;
- la moda.

Definizione (Media aritmetica)

Supponiamo di considerare il carattere quantitativo di una popolazione e siano x_1, x_2, \dots, x_n i dati osservati. La loro media aritmetica \bar{x} (o μ) è data dal rapporto fra la loro somma e il numero totale n di misurazioni:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Esempio

Supponiamo che uno studente del corso di Laurea in Farmacia abbia sostenuto i seguenti esami con le seguenti valutazioni

Esame	Voto
Matematica	28
Chimica generale ed inorganica	21
Biologia animale	26
Biologia Vegetale e Botanica Farmaceutica	29

La sua media aritmetica è

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4} = \frac{28 + 21 + 26 + 29}{4} = \frac{104}{4} = 26$$

Ai fini del calcolo del voto di laurea si considera la media ponderata dei voti ottenuti negli esami.

Definizione (Media aritmetica ponderata)

Consideriamo n dati numerici x_1, x_2, \dots, x_n e i corrispondenti pesi p_1, p_2, \dots, p_n . La media ponderata è data da

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (2)$$

Esempio

Calcoliamo la media ponderata dei voti dello studente di farmacia

Esame	Voto	CFU
Matematica	28	6
Chimica generale ed inorganica	21	11
Biologia animale	26	6
Biologia Vegetale e Botanica Farmaceutica	29	10

La sua media ponderata è

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i p_i}{\sum_{i=1}^4 p_i} = \frac{28 \cdot 6 + 21 \cdot 11 + 26 \cdot 6 + 29 \cdot 10}{6 + 11 + 6 + 10} = \frac{845}{33} \simeq 25,6$$

Definizione (Media geometrica)

Consideriamo n dati numerici x_1, x_2, \dots, x_n . La loro **media geometrica** è data da:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (3)$$

Esempio

Supponiamo che una popolazione, composta inizialmente da P_0 elementi, subisca il primo anno un aumento del 14%, il secondo anno del 12%, il terzo anno del 10% e il quarto anno del 9%, sempre rispetto alla popolazione dell'anno precedente. Indicando con r_i il tasso di crescita annuale, la popolazione nei vari anni è data da:

$$P_1 = P_0 + r_1 P_0 = P_0(1 + r_1) = P_0 \left(1 + \frac{14}{100}\right) = \frac{114}{100} P_0$$

$$P_2 = P_1 + r_2 P_1 = P_1(1 + r_2) = \frac{114}{100} P_0 \left(1 + \frac{12}{100}\right) = P_0 \frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100}$$

$$P_1 = P_0 + r_1 P_0 = P_0(1 + r_1) = P_0 \left(1 + \frac{14}{100} \right) = \frac{114}{100} P_0$$

$$P_2 = P_1 + r_2 P_1 = P_1(1 + r_2) = \frac{114}{100} P_0 \left(1 + \frac{12}{100} \right) = \frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100} P_0$$

$$P_3 = P_2 + r_3 P_2 = P_2(1 + r_3) = \frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100} P_0 \left(1 + \frac{10}{100} \right) = \frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100} \cdot \frac{110}{100} P_0$$

$$P_4 = P_3 + r_4 P_3 = P_3(1 + r_4) = \frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{109}{100} P_0 \simeq 1,53 P_0$$

Quindi dopo 4 anni la popolazione è circa $1,53P_0$. Il tasso di crescita medio è stato

$$\sqrt[4]{\frac{114}{100} \cdot \frac{112}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{109}{100}} \simeq 1,11233$$

quindi l'aumento percentuale medio si ricava da

$$1,11233 - 1 = 0,11233 \quad \Rightarrow \quad 11,233\%$$

Definizione (Mediana)

Supponiamo di avere n dati x_1, x_2, \dots, x_n ordinati in senso crescente:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Si definisce loro **mediana**:

- il dato $x_{\frac{n+1}{2}}$ che occupa la posizione centrale, se n è dispari;
- la media aritmetica dei due dati nelle posizioni centrali $x_{\frac{n}{2}}$ e $x_{\frac{n}{2}+1}$, se n è pari.

Esempio

Le stature (in cm) di un campione di 9 persone sono

173 182 177 174 175 179 164 181 182

Per determinare la mediana ordiniamo i dati in senso crescente:

$$\begin{aligned}x_1 &= 164, & x_2 &= 173, & x_3 &= 174, & x_4 &= 175, & x_5 &= 177, \\x_6 &= 179, & x_7 &= 181, & x_8 &= 182, & x_9 &= 182\end{aligned}$$

Poiché i dati sono in numero dispari la mediana è il valore centrale $x_5 = 177$.

Se il campione fosse stato di 8 persone e il dato escluso fosse stato l'ultima misura (182 cm), la mediana sarebbe stata la media aritmetica tra i due valori centrali, quindi

$$\frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{175 + 177}{2} = 176$$

Osservazione

La mediana divide i dati in due parti di ugual numerosità. Sia nel caso che n sia pari, sia nel caso che n sia dispari, risulta che almeno la metà dei dati sono minori o uguali alla mediana, e almeno la metà sono maggiori o uguali a essa. È proprio questa l'informazione che la mediana ci dà sul fenomeno oggetto dell'indagine statistica: almeno il 50% della popolazione presenta modalità minori o uguali alla mediana e almeno il 50% della popolazione presenta modalità maggiori o uguali alla mediana.

Quartili

Se si dividono i dati in 4 parti di uguale numerosità i 3 elementi che dividono i dati assegnati sono detti **quartili**. Il **primo quartile** divide il 25% dei dati che assumono il valore più basso dal 75% che assumono il valore più alto; il **secondo quartile** è la mediana; il **terzo quartile** separa il 75% dei dati più bassi dal 25% di quelli più alti.

Definizione (Moda)

*In un'indagine statistica si definisce **moda** la modalità che si presenta con la massima frequenza.*

Esempio

Nella scelta della scuola effettuata dagli studenti italiani in possesso della licenza di scuola media inferiore, nel 1948 la moda era rappresentata dai Licei Classici.

Esempio

Nell'ultima sessione l'esame di matematica è stato superato da 7 persone con i seguenti voti: 30, 19, 22, 27, 25, 22, 21. Tutte le modalità hanno frequenza pari a 1, eccetto 22 che ha frequenza 2, quindi la moda è 22.

Indici di dispersione

La sintesi attraverso gli indici di posizione spesso non è sufficiente, in quanto non tiene conto di come i dati sono distribuiti attorno al valore centrale. Ad esempio entrambe le distribuzioni di dati

Gruppo A: 8 9 10 11 12

Gruppo B: 1 2 10 18 19

ammettono come media e mediana il valore 10, ma nel primo caso tutti i dati sono raccolti attorno alla media, mentre nel secondo sono molto più dispersi. Per questo motivo può essere utile utilizzare gli **indici di dispersione**, i quali danno informazioni sulla variabilità dei dati.

Scarti dalla media

Per cominciare ad avere una misura della dispersione dei dati si può calcolare la loro deviazione dalla media aritmetica, ossia la differenza tra ognuno di essi e la media \bar{x} . Tale differenza è detta **scarto** dalla media.

Definizione (Varianza)

Si definisce **varianza** di n dati x_1, x_2, \dots, x_n , e si indica con $Var(x_i)$ o σ^2 , la media aritmetica dei quadrati degli scarti dalla media \bar{x} :

$$Var(x_i) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4)$$

Quando non si utilizza il computer, per calcolare la varianza spesso bisogna eseguire molti calcoli. In alternativa si può utilizzare un'altra formula, equivalente alla (4), ma che comporta meno calcoli.

Proposizione

La varianza $Var(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ può essere equivalentemente espressa come

$$Var(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (5)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Var(x_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \frac{1}{n} \cdot n\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$



Esempio

Calcoliamo la varianza dei seguenti dati

Gruppo A: 8 9 10 11 12

Gruppo B: 1 2 10 18 19

Sapendo che $\bar{x}_A = 10 = \bar{x}_B$. Allora

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{5} (8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2) - 10^2 = \\ &= \frac{510}{5} - 100 = 102 - 100 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{5} (1^2 + 2^2 + 10^2 + 18^2 + 19^2) - 10^2 = \\ &= \frac{790}{5} - 100 = 158 - 100 = 58 \end{aligned}$$

Osservazione

A causa dell'elevamento al quadrato degli scarti, la varianza porta a delle distorsioni dimensionali: non presenta la stessa unità di misura delle modalità del carattere.

Per superare tale problema si è definito un altro indice di dispersione.

Definizione (Deviazione standard)

Si definisce **deviazione standard** o **scarto quadratico medio** dei dati x_1, x_2, \dots, x_n , e si indica con σ , la radice quadrata della loro varianza:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x_i)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} \quad (6)$$

Esempio

Calcoliamo la varianza e la deviazione standard dei seguenti dati

Esame	Voto
Matematica	28
Chimica generale ed inorganica	21
Biologia animale	26
Biologia Vegetale e Botanica Farmaceutica	29

Avevamo già calcolato $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{104}{4} = 26$. Allora

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{4} (28^2 + 21^2 + 26^2 + 29^2) - 26^2 =$$

$$= 685,5 - 676 = 9,5$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x_i)} = \sqrt{9,5} \simeq 3,082$$

Indici di dispersione: varianza e deviazione standard

Esempio

Nella classe 5A di una scuola tutti i 20 studenti hanno preso 6 nel compito in classe. Nella classe 5B, anch'essa di 20 studenti, la metà ha preso 4, l'altra metà 8. Calcoliamo la varianza e la deviazione standard.

Nella 5A gli studenti hanno preso tutti lo stesso voto, quindi non c'è variabilità. Infatti sia varianza che deviazione standard sono uguali a 0:

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{20} (6^2 + \dots + 6^2) - \left(\frac{6 + \dots + 6}{20} \right)^2 = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{0} = 0$$

Per la 5B osserviamo che la media dei voti $\bar{x} = \frac{4 \cdot 10 + 8 \cdot 10}{20} = \frac{120}{20} = 6$.

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{20} \left(\underbrace{4^2 + \dots + 4^2}_{10 \text{ volte}} + \underbrace{8^2 + \dots + 8^2}_{10 \text{ volte}} \right) - 6^2 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

Osservazione

Varianza e deviazione standard

- assume valore minimo, uguale a 0, se tutti i dati osservati sono uguali;
- assumono valori positivi, via via crescenti all'aumentare della variabilità.

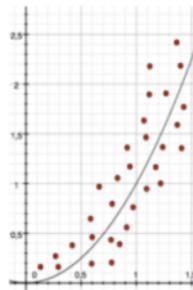
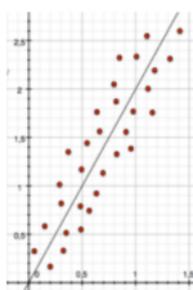
Curve fitting

Spesso, in campo scientifico, non si ha a che fare con singoli dati, ma con coppie di dati e la relazione fra essi.

Esempio

I livelli di emoglobina prima della terapia sono in relazione con i livelli di emoglobina dopo la terapia?

Dati due caratteri quantitativi x e y di cui si conoscono alcune coppie di dati (x_i, y_i) , si rappresentano questi ultimi su un piano cartesiano ottenendo una "nuvola di punti" o "diagramma di dispersione" e attraverso il processo di **curve fitting** si cerca di determinare una funzione $y = f(x)$, detta **funzione interpolante**, che assuma valori vicini a quelli rilevati.



Curve fitting

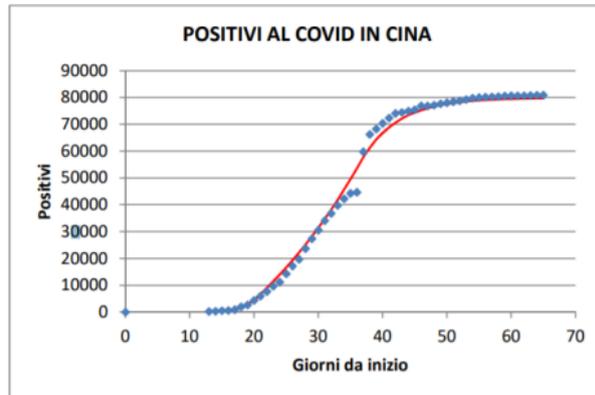
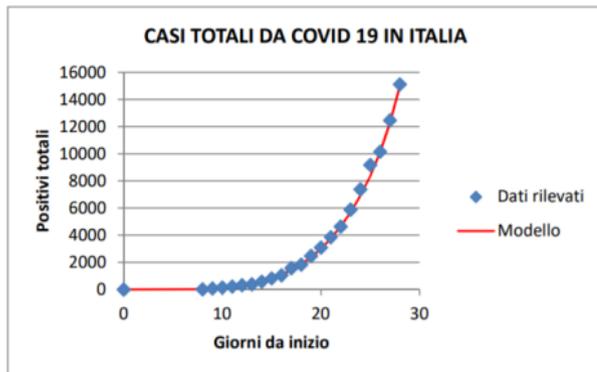


Figura: Fonte: <https://www.teatrionline.com/wp-content/uploads/Limplacabile-matematica-del-Coronavirus.pdf>

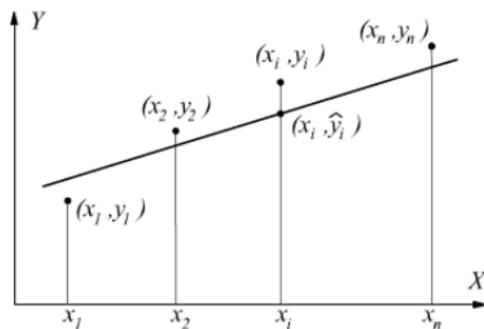
Metodo dei minimi quadrati

Una volta scelto il tipo di funzione approssimante, si possono applicare vari metodi per approssimarla. Uno dei più utilizzati è il **metodo dei minimi quadrati**.

Metodo dei minimi quadrati

Il metodo consiste nel determinare la funzione interpolante che minimizza la somma dei quadrati degli scarti fra dati osservati y_i e dati teorici \hat{y} , cioè

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2$$



Supponiamo di scegliere come funzione interpolante una funzione lineare.

Definizione (Retta di regressione lineare)

Dati due caratteri x e y , si definisce **retta di regressione** che esprime y in funzione di x la retta di equazione:

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \quad \text{con } m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad (7)$$

dove σ_{xy} è detto "covarianza".

Osservazione

Ricordando la formula della retta passante per un punto e di direzione assegnata, l'equazione della retta di regressione è la retta passante per il punto di coordinate (\bar{x}, \bar{y}) .

Esempio

La relazione tra i positivi x al virus Sars-Cov-2 e i deceduti y nel periodo 3-12 marzo in Italia può essere interpolato con la seguente retta di regressione lineare.

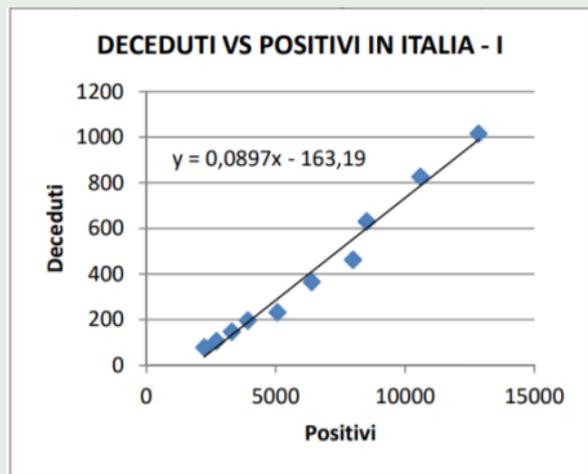


Figura: Fonte: <https://www.teatrionline.com/wp-content/uploads/Limplacabile-matematica-del-Coronavirus.pdf>

La *covarianza* è un indice statistico molto utilizzato per valutare la correlazione tra due caratteri quantitativi, cioè la dipendenza fra essi.

Definizione (Covarianza)

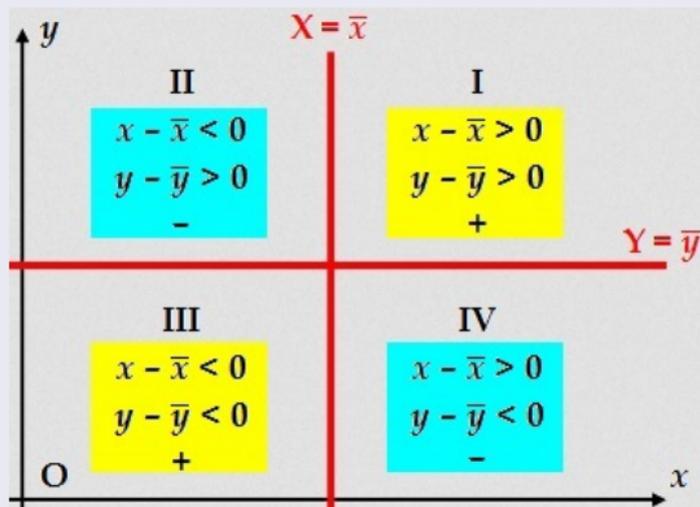
Siano x e y due caratteri quantitativi di medie \bar{x} e \bar{y} , rilevati da una popolazione di n unità. Siano x_1, \dots, x_n i valori osservati di x e y_1, \dots, y_n i valori osservati di y . Si definisce **covarianza** di x e y il numero

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} \quad (8)$$

Significato covarianza

Rappresentando su un piano cartesiano i punti (x_i, y_i) si ottiene una “nuvola” di punti.

Consideriamo il punto (\bar{x}, \bar{y}) il baricentro di tale “nuvola” e tracciamo passanti per esso e parallele agli assi. Le rette dividono il piano in 4 semipiani che numeriamo in senso antiorario partendo da quello in alto a destra (I), come in figura.



Significato covarianza

A seconda del semipiano in cui si trova il punto (x_i, y_i) gli scarti $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$ assumono diversi segni, quindi la covarianza σ_{XY} assume diversi segni. In particolare

- se $\sigma_{XY} > 0$ la maggioranza dei prodotti $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ sono positivi, quindi la maggior parte dei punti (x_i, y_i) si trova nei semipiani *I* e *III*. Quindi la nuvola di punti si concentra in tali semipiani: quindi vi è una relazione di tipo lineare crescente tra X e Y ;
- se $\sigma_{XY} < 0$ la maggioranza dei prodotti $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ sono negativi, quindi la maggior parte dei punti (x_i, y_i) si trova nei semipiani *II* e *IV*. Quindi la nuvola di punti si concentra in tali semipiani: quindi vi è una relazione di tipo lineare decrescente tra X e Y ;
- se $\sigma_{XY} = 0$ i punti (x_i, y_i) sono sparpagliati senza alcuna regolarità, oppure sono disposti secondo relazioni diverse da quella lineare.

- World Health Organization
- Protezione Civile
- Istituto Superiore di Sanità
- Ministero della Salute
- Worldometers
- Johns Hopkins University
- Coronavirus - Dati e Analisi Scientifiche (Facebook, telegram, instagram)
- Fondazione GIMBE
- Pillole di Ottimismo
- <https://public.flourish.studio/story/722265/>
- <https://www.localchef.it/statistiche-coronavirus-tempo-reale/>
- <https://statistichecoronavirus.it/>